

2022/4/22 @ 九州大学 宇宙物理理論研究室 セミナー

Unified approach to CMB anisotropies beyond linear order

齊藤 遼 (山口大学)

共同研究者：平松尚志, 佐々木節, 樽家篤史,
成子篤, 並河俊弥, 山内大介

Based on: Namikawa, Naruko, RS, Taruya, and Yamauchi
JCAP 10 (2021) 029

今日の内容

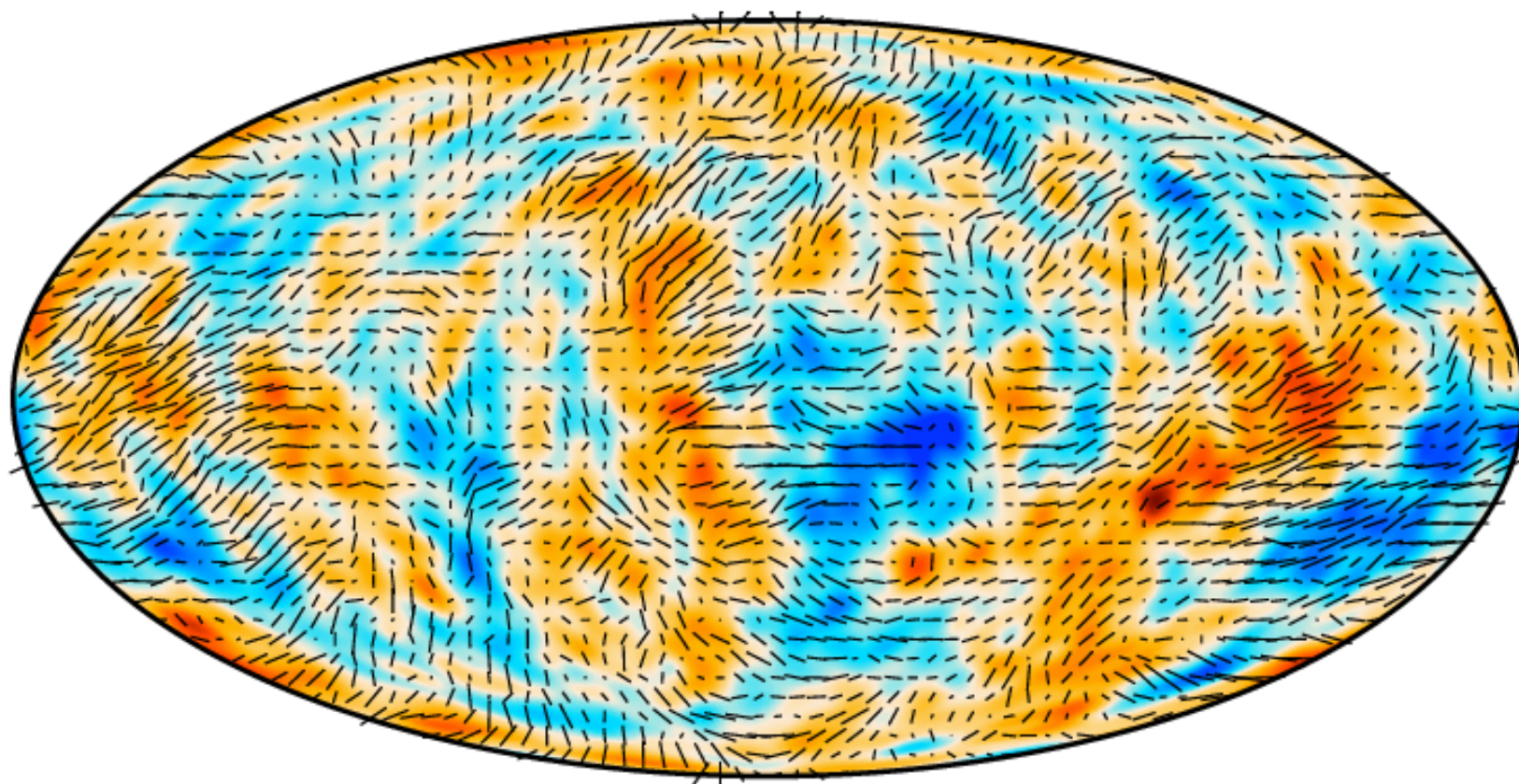
1. 導入 – 宇宙マイクロ波背景放射 (CMB)
2. CMB異方性の精密計算 – 非線形効果, 弱重力レンズ効果
3. Curve-of-sight法とその応用

RS, Naruko, Hiramatsu, and Sasaki, JCAP**1410** (2014) 051

Namikawa, Naruko, RS, Taruya, and Yamauchi, JCAP **10** (2021) 029

宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background)

全天からやってくる $2.7\text{K} \pm 0(10)\mu\text{K}$ の黒体放射



宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background)

全天からやってくる $2.7\text{K} \pm 0(10)\mu\text{K}$ の黒体放射

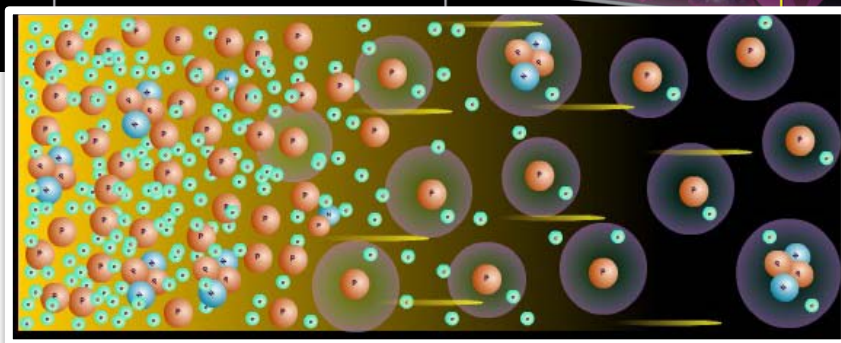
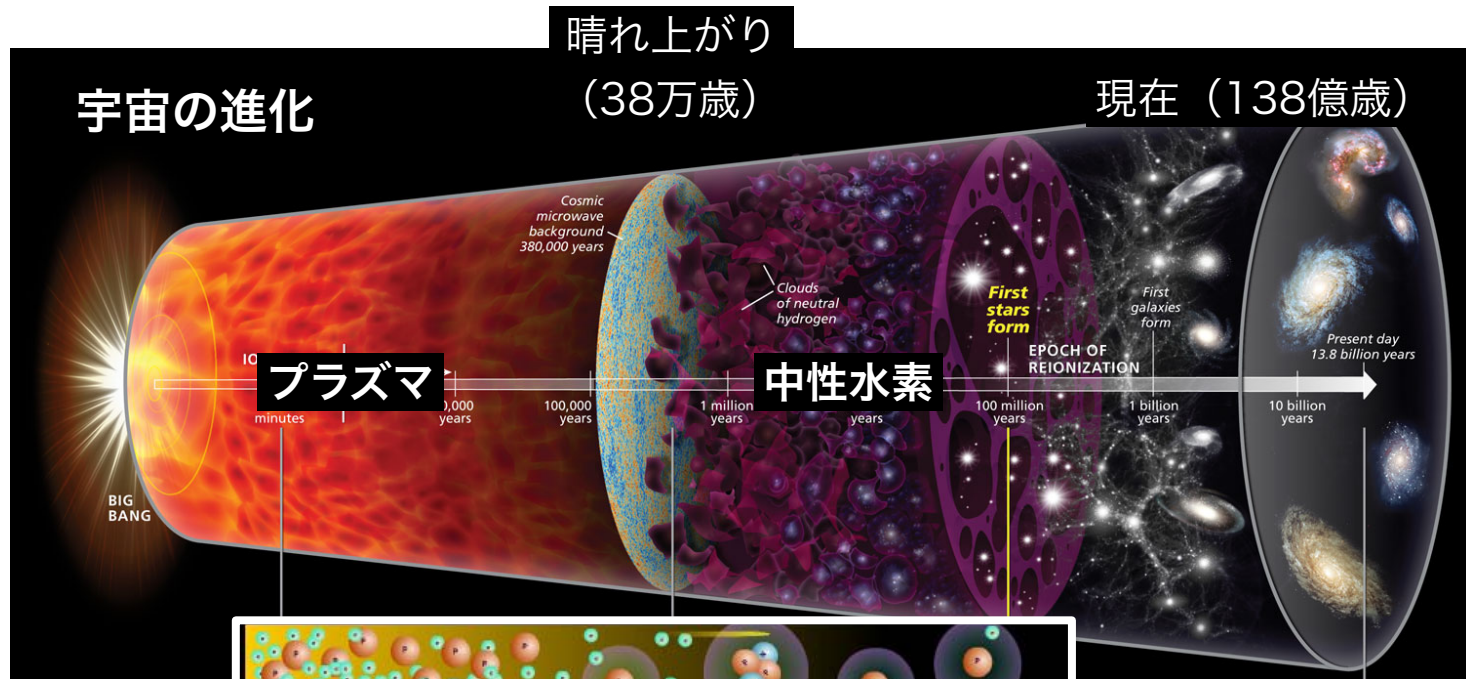
ビッグバン宇宙論の証拠であり，初期宇宙の豊富な情報源！

精密で豊富なデータがあり，
基本的な物理がよく分かっており，
精密に計算することが可能

ビッグバンの残光

■ ビッグバン宇宙論

宇宙を遡ると高密度・高温になり，水素原子は電離してプラズマ状態になる。

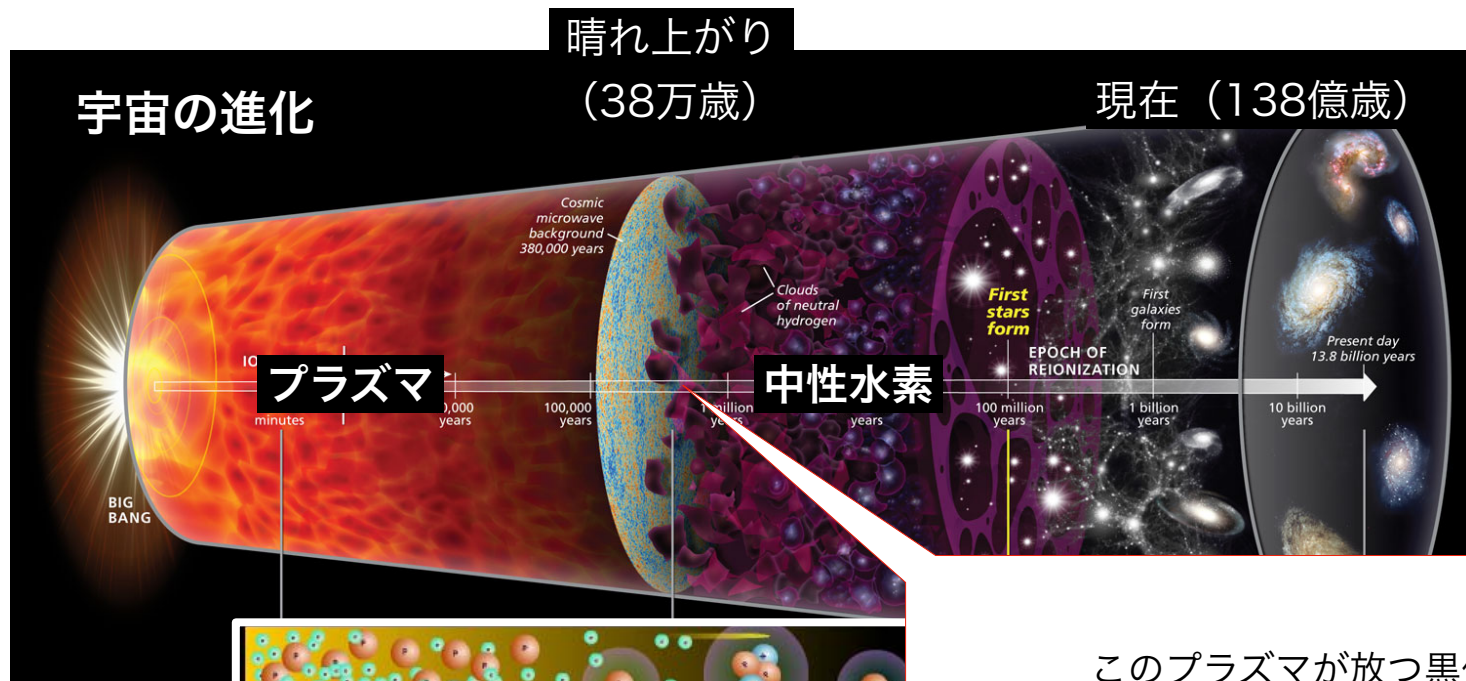


[discovermagazine]

ビッグバンの残光

■ ビッグバン宇宙論

宇宙を遡ると高密度・高温になり、水素原子は電離してプラズマ状態になる。

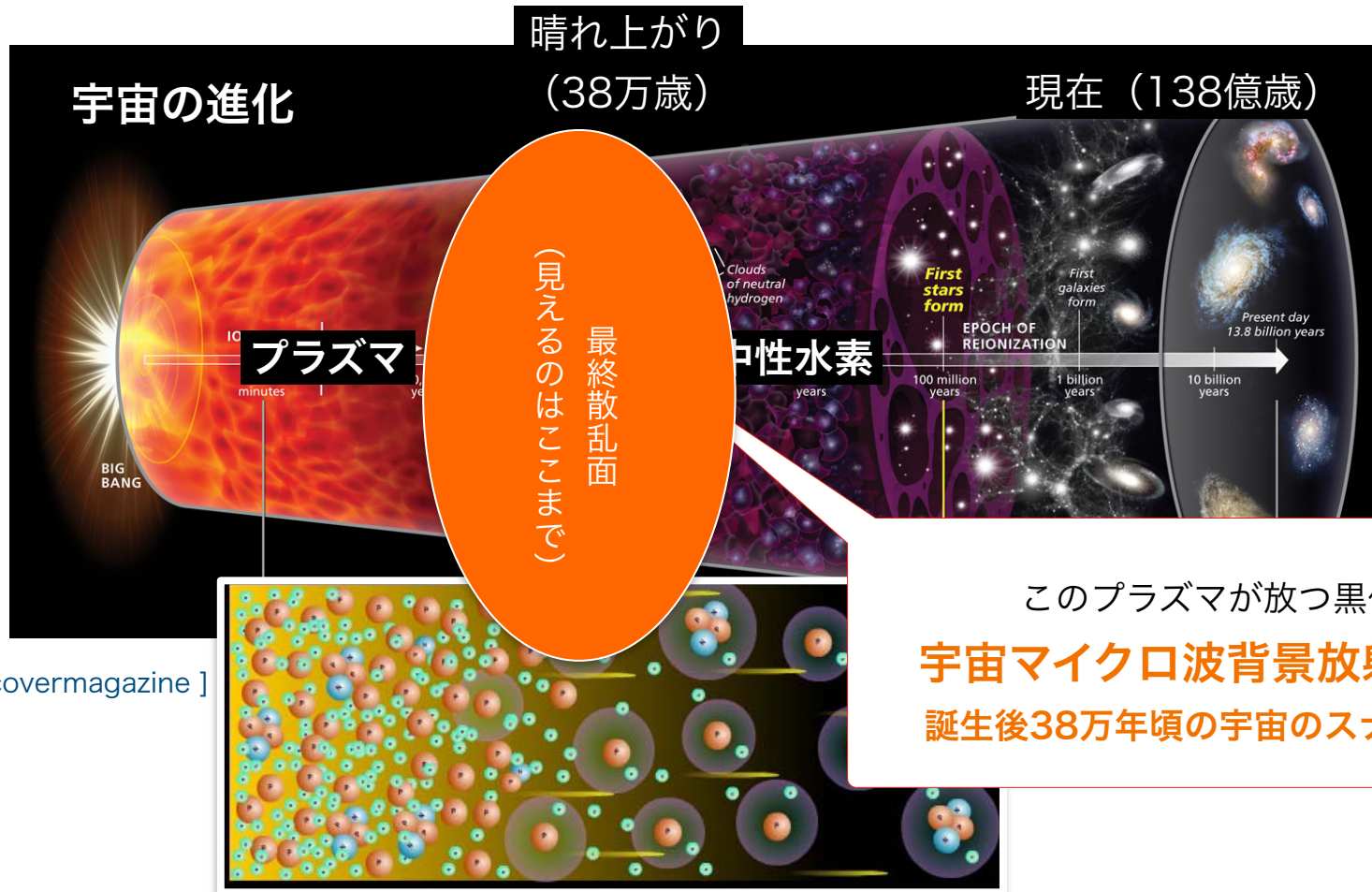


このプラズマが放つ黒体放射が
宇宙マイクロ波背景放射 (CMB)

ビッグバンの残光

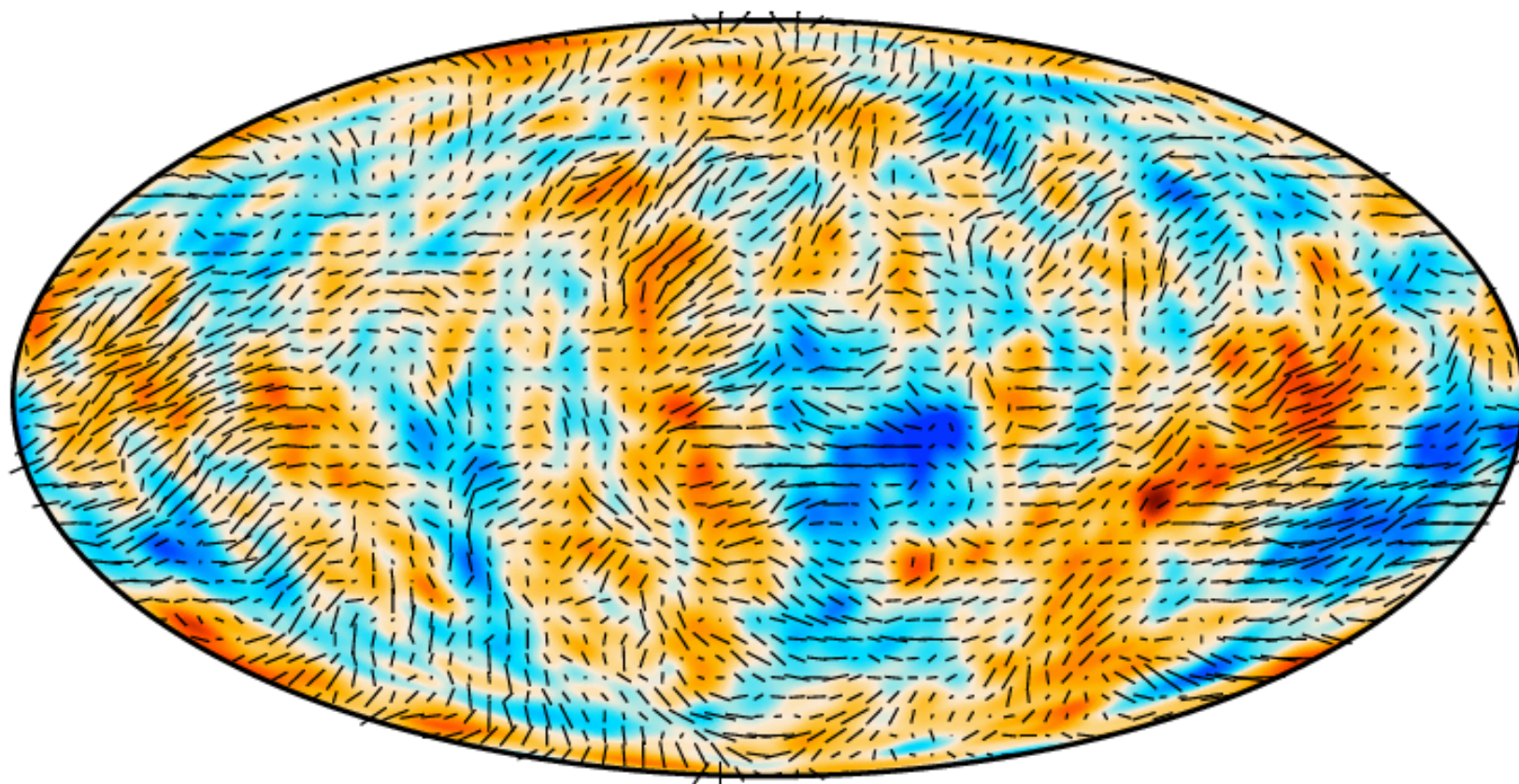
■ ビッグバン宇宙論

宇宙を遡ると高密度・高温になり、水素原子は電離してプラズマ状態になる。



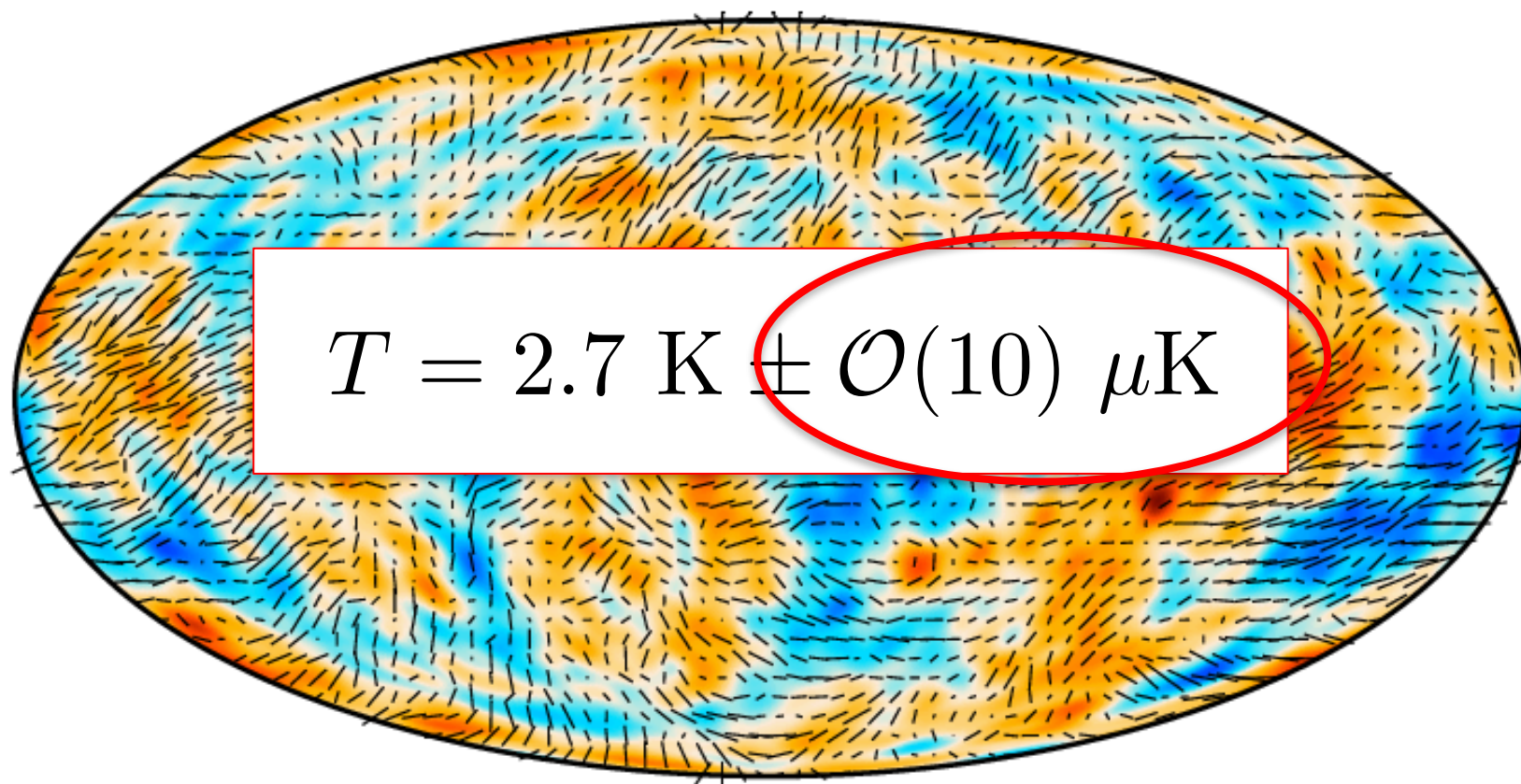
CMB温度・偏光異方性

プランク衛星によって観測された温度（強度）・偏光の全天マップ



CMB温度・偏光異方性

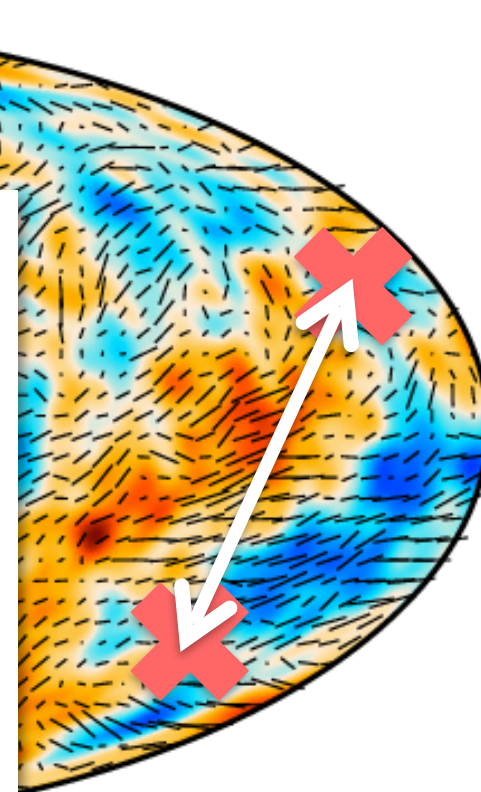
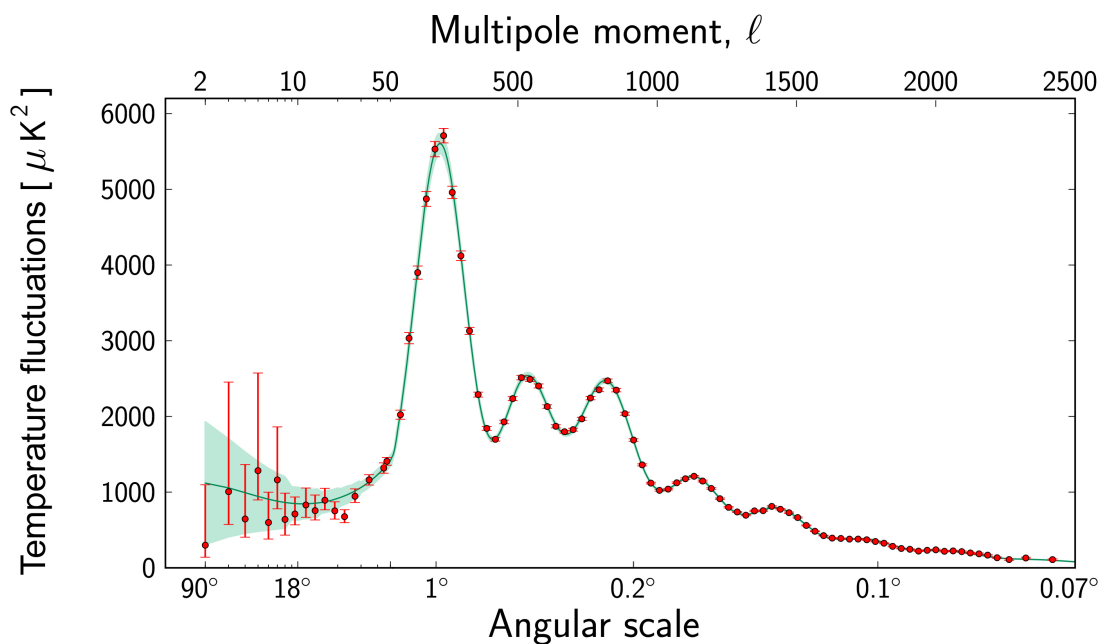
プランク衛星によって観測された温度（強度）・偏光の全天マップ



CMB温度・偏光異方性

プランク衛星によって観測された温度（強度）・偏光の全天マップ

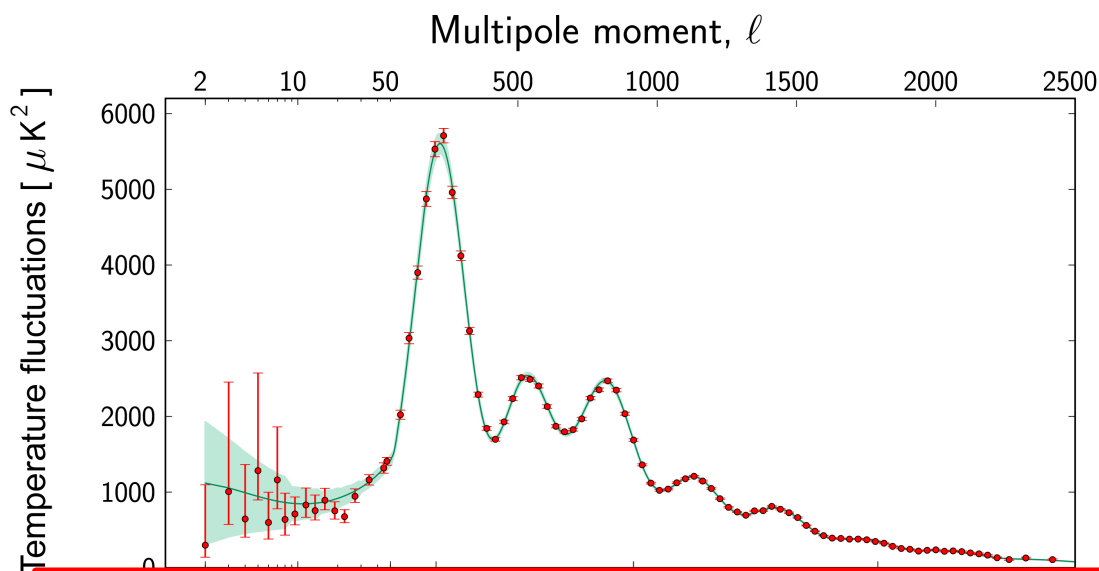
角度パワースペクトル



CMB温度・偏光異方性

プランク衛星によって観測された温度（強度）・偏光の全天マップ

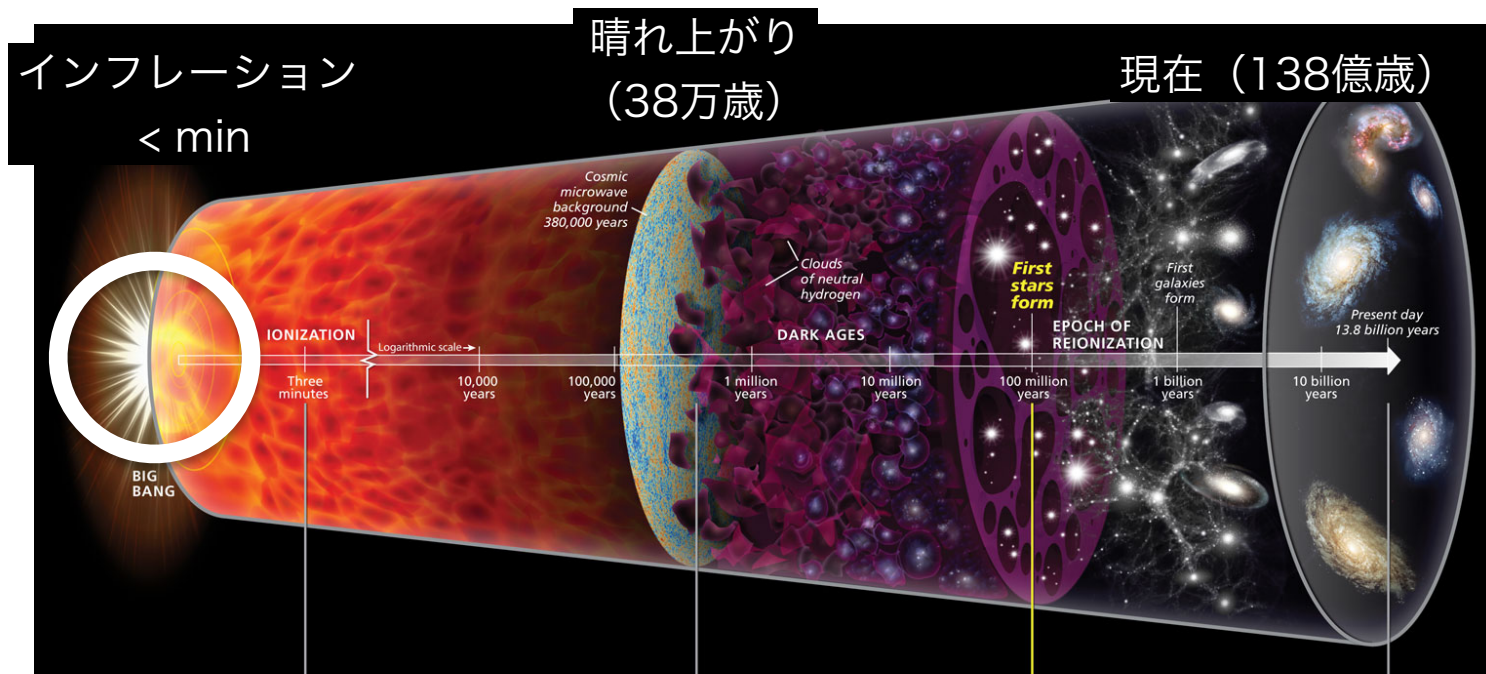
角度パワースペクトル



この“異方性”が初期宇宙に関する有用な情報を持っている！
(ゆらぎ)

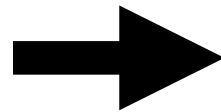
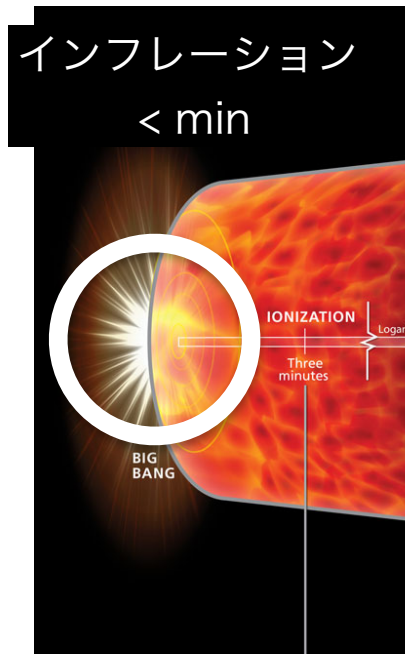
ゆらぎの進化の標準シナリオ

宇宙極初期に起きた**急速な加速膨張（インフレーション）**によって、量子ゆらぎから宇宙論的スケールの**原始ゆらぎ**が生まれる。



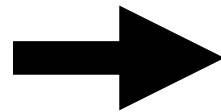
ゆらぎの進化の標準シナリオ

宇宙極初期に起きた**急速な加速膨張（インフレーション）**によって、量子ゆらぎから宇宙論的スケールの**原始ゆらぎ**が生まれる。



原始密度ゆらぎ

- ・ 星, 銀河, CMB温度異方性などの起源



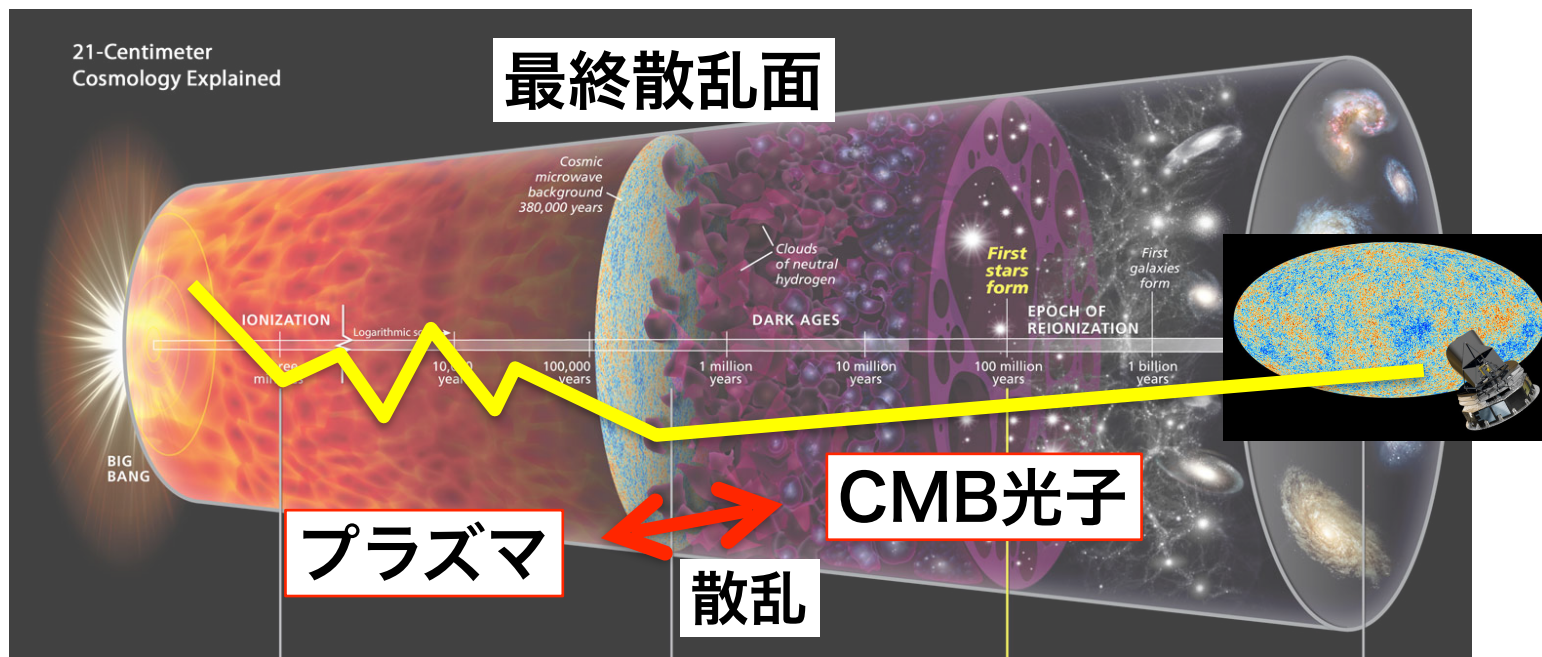
原始重力波（未検出）

- ・ インフレーション理論 検証のキー
- ・ CMBに**Bモード偏光**を生み出す.
- ・ CMBの将来観測計画のターゲット

原始ゆらぎによるCMB異方性の生成

プラズマによる散乱や重力赤方偏移を通して、CMBの分布は異方性を持つ

インフレーション

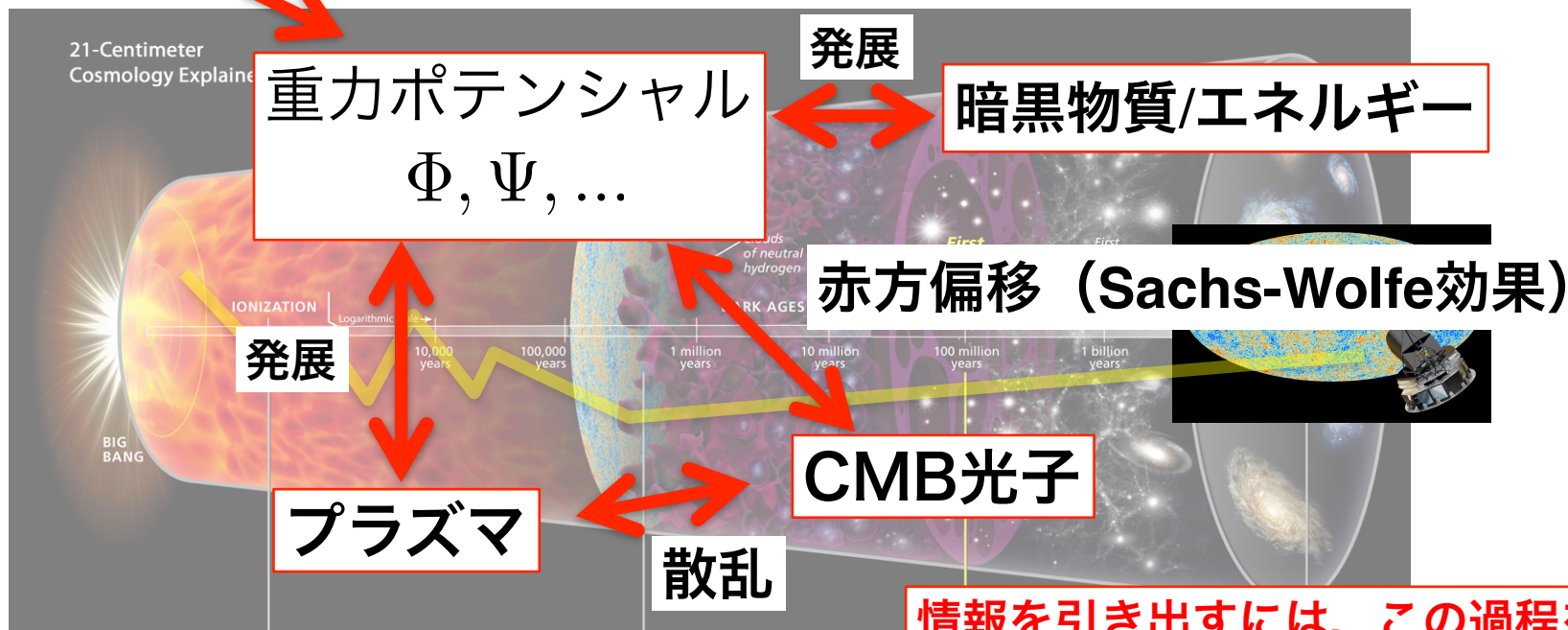


原始ゆらぎによるCMB異方性の生成

プラズマによる散乱や重力赤方偏移を通して、CMBの分布は異方性を持つ

インフレーション

初期条件



CMB異方性はインフレーションや暗黒物質/エネルギーの情報を持つ

CMB異方性の精密計算

非線形効果, 弱重力レンズ効果

CMB異方性の発展

CMB異方性の発展を記述する方程式

- アインシュタイン方程式 (重力)
- 流体方程式 (暗黒物質/エネルギー)
- ボルツマン方程式 (光子)

- CMB異方性の発展は、これらの**非線形方程式**を摂動的に解くことで追うことができる (異方性・ゆらぎの大きさ $\sim 0.001\%$)
- 近年の観測技術の進展により、**線形摂動**では現れない**非線形効果**を観測・議論できるようになっている。

非線形効果を含めてCMBを計算する高次摂動論の整備が必要

[Pitrou], [Huang & Vernizzi], [Portsmouth group], [Cambridge group], [RS+],...

非線形効果の例

アインシュタイン・流体方程式の非線形性

[Tomita 67, Matarrese+ 93, 94],
[Ananda+ 07, Baumann+ 07],...

- 密度ゆらぎからの2次的な重力波生成

ボルツマン方程式の非線形性
$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dq^i}{d\eta} \frac{\partial}{\partial q^i} \right) f = \dot{\tau} C$$

- 最終散乱面のゆらぎ (Perturbed Recombination)

電子 (散乱体) のゆらぎ

[Senatore+ 09,...]

- 非線形コンプトン散乱 [Beneke+ 10, 11; Fidler+ 14,...]

散乱 (右辺) の非線形性

- 最終散乱後の重力の効果 (赤方偏移, 重力レンズ効果)

移流項 (左辺) の非線形性

非線形効果の例

アインシュタイン・流体方程式の非線形性

[Tomita 67, Matarrese+ 93, 94],
[Ananda+ 07, Baumann+ 07],...

- 密度ゆらぎからの2次的な重力波生成

ボルツマン方程式の非線形性
$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dq^i}{d\eta} \frac{\partial}{\partial q^i} \right) f = \dot{\tau} C$$

- 最終散乱面のゆらぎ (Perturbed Recombination)

電子 (散乱体) のゆらぎ

[Senatore+ 09,...]

- 非線形コンプトン散乱 [Beneke+ 10, 11; Fidler+ 14,...]

散乱 (右辺) の非線形性

- 最終散乱後の重力の効果 (赤方偏移, **重力レンズ効果**)

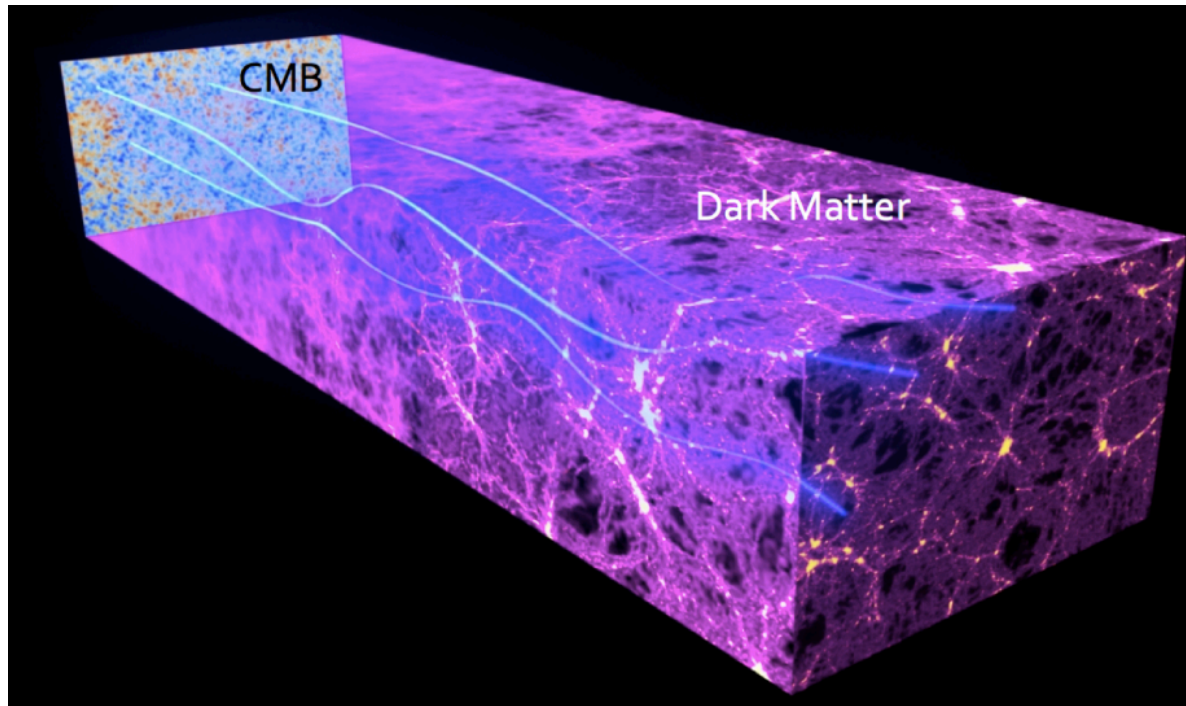
移流項 (左辺) の非線形性

CMBレンズ – CMBへの弱重力レンズ効果

[Review: Lewis & Challinor 06]

前景の重力ポテンシャルによって、CMB光子は散乱されて軌道が曲げられる。

最も重要な非線形効果



CMBレンズによる非線形シグナル

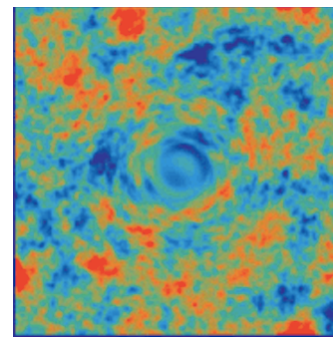
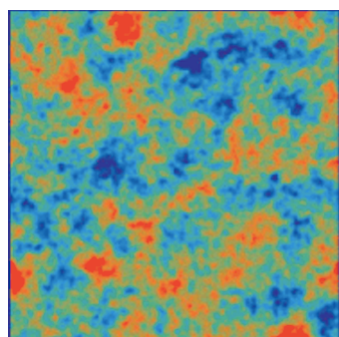
CMBレンズは、CMBゆらぎを非線形に歪める：

重力ポテンシャル

$$\delta T \rightarrow \delta T + \delta T * \Phi$$

CMBレンズによる歪み

unlensed



lensed

➡ 温度マップに多点相関が生じる

ISW-lensing bispectrum (3点相関)

この非線形シグナルはすでに検出されている! ($f_{NL} \cong 7$) [Planck 13]

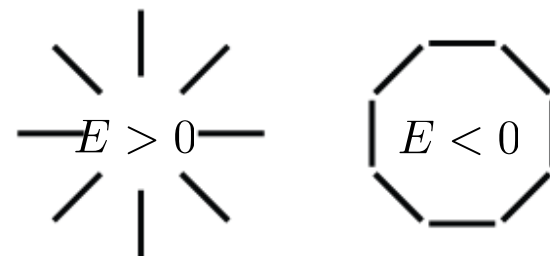
CMBレンズによる非線形シグナル 2

CMB光子のBモード偏光

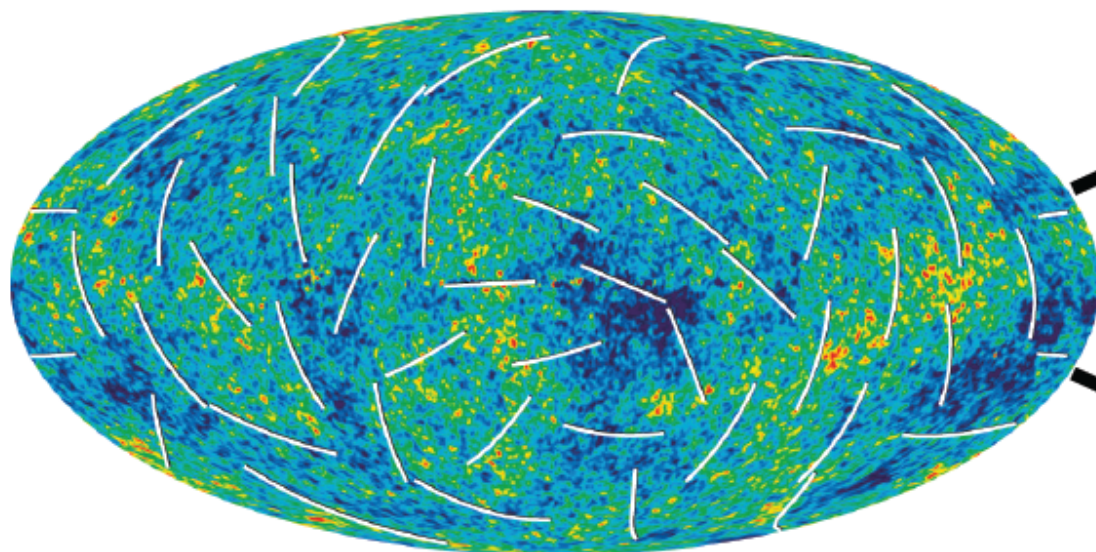
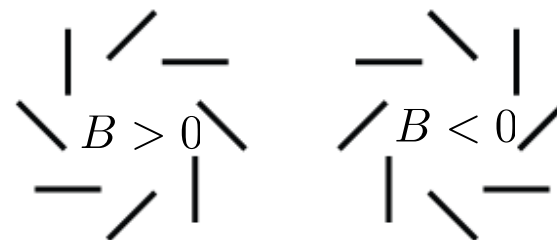
偏光マップは、EモードとBモードの2つに分解できる：

偶パリティ $E(-\mathbf{n}_O) = E(\mathbf{n}_O)$

E-modes



B-modes



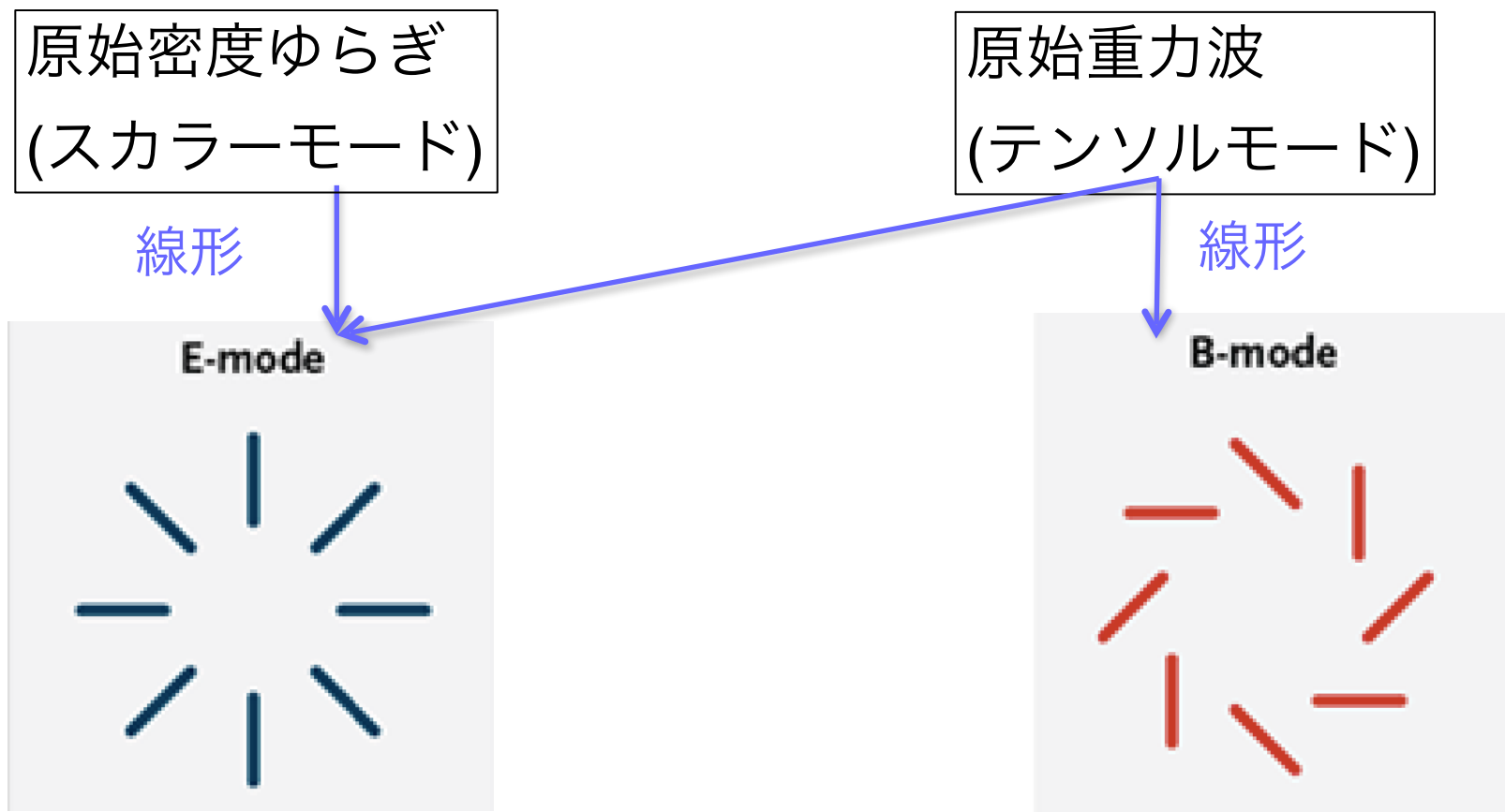
WMAP Science Team

[arXiv:1407.2584]

奇パリティ $B(-\mathbf{n}_O) = -B(\mathbf{n}_O)$

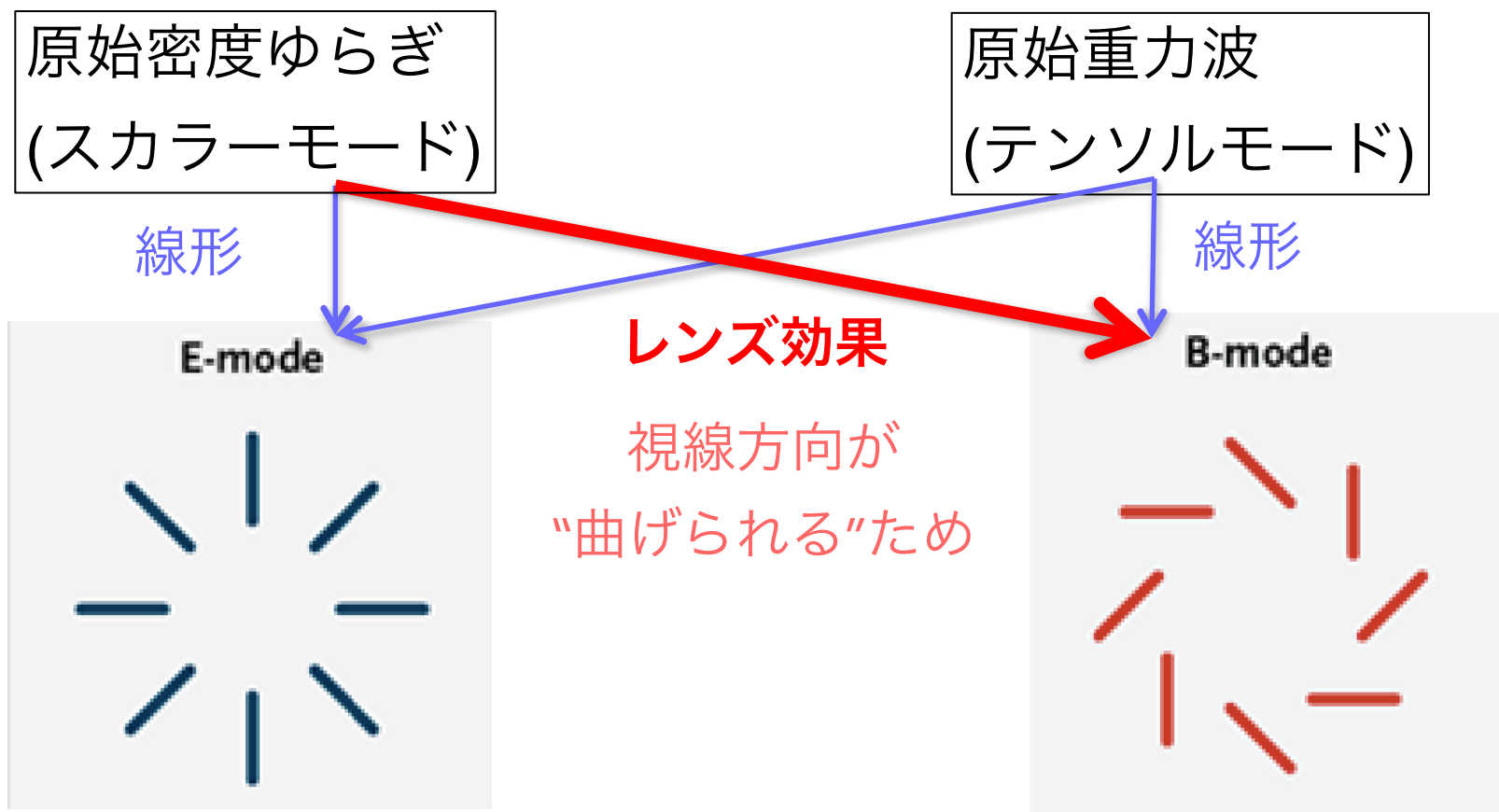
CMBレンズによる非線形シグナル 2

レンズ効果によって、EモードとBモードは混合する：



CMBレンズによる非線形シグナル 2

レンズ効果によって、EモードとBモードは混合する：



レンズ効果によるBモード偏光

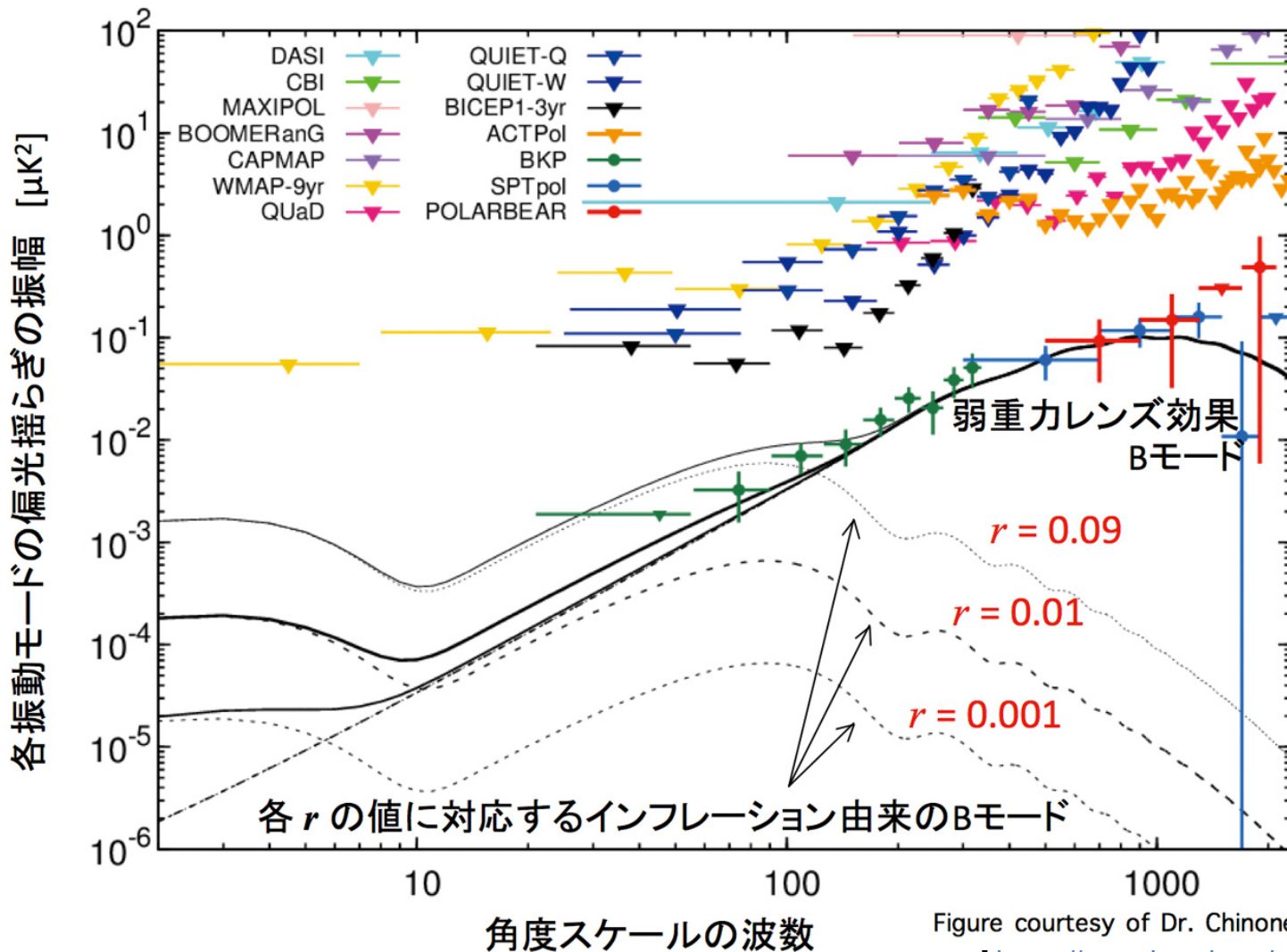


Figure courtesy of Dr. Chinone
[<https://www.isas.jaxa.jp>]

レンズ効果によるBモード偏光

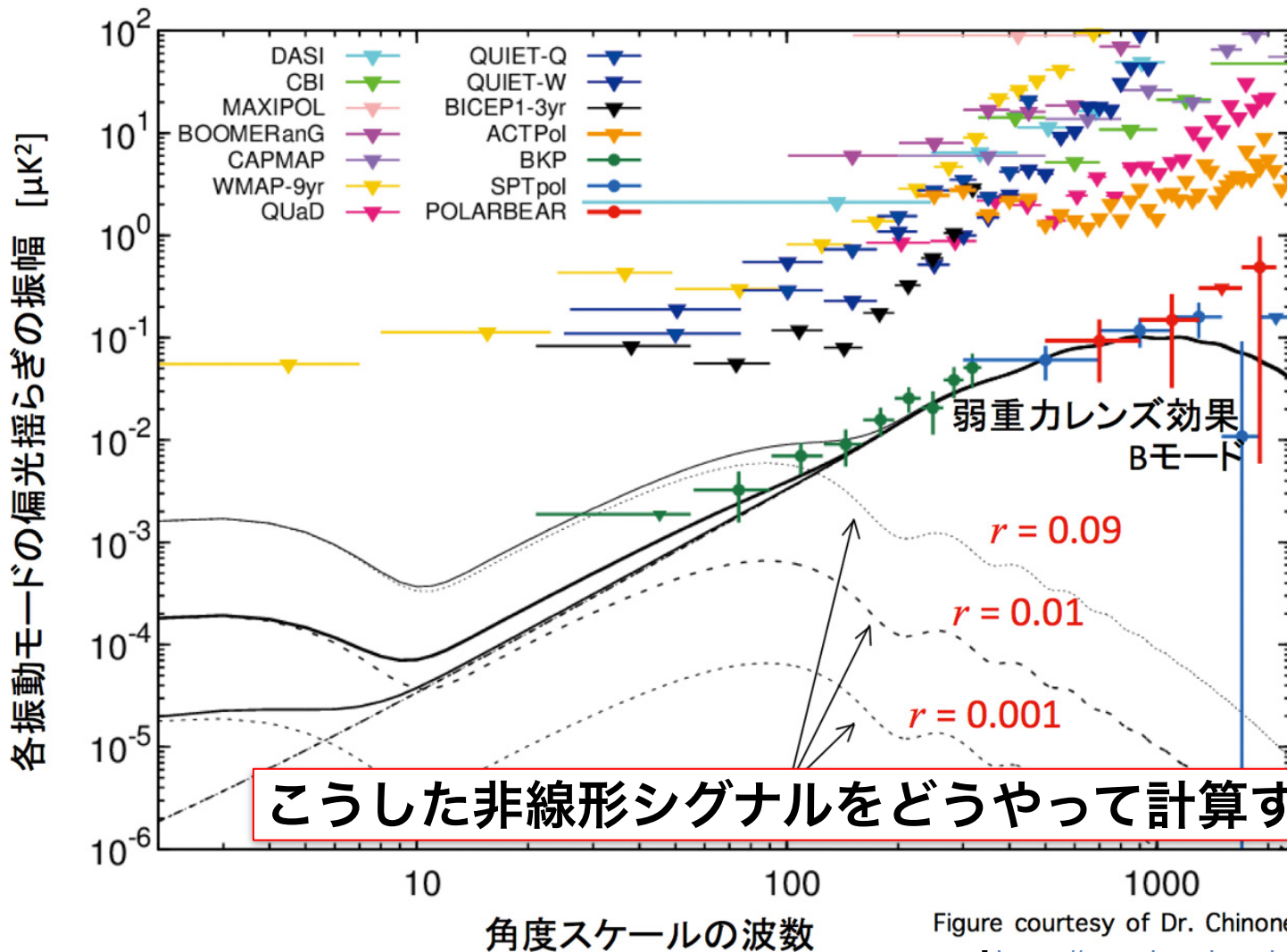


Figure courtesy of Dr. Chinone
[<https://www.isas.jaxa.jp>]

CMB計算の困難 - ボルツマン方程式の階層性

ボルツマン方程式は無限個の連立微分方程式を成す (Boltzmann hierarchy):

$$\dot{f}_\ell - ikC^{+, \ell} f_{\ell+1} + ikC^{-, \ell} f_{\ell-1} = \dot{\tau}C_\ell + D_\ell$$

$(l = 0, 1, 2, \dots)$

* ボルツマン方程式をフーリエ変換 + 球面調和関数展開

f_ℓ : CMB光子の分布関数の ℓ 次多重極係数

$\dot{\tau}C_\ell + D_\ell$: コンプトン散乱 / 重力による散乱に起因する衝突項

観測されている多重極 ($\ell \approx 2500$) まで解くのは困難

CMB計算の困難 - ボルツマン方程式の階層性

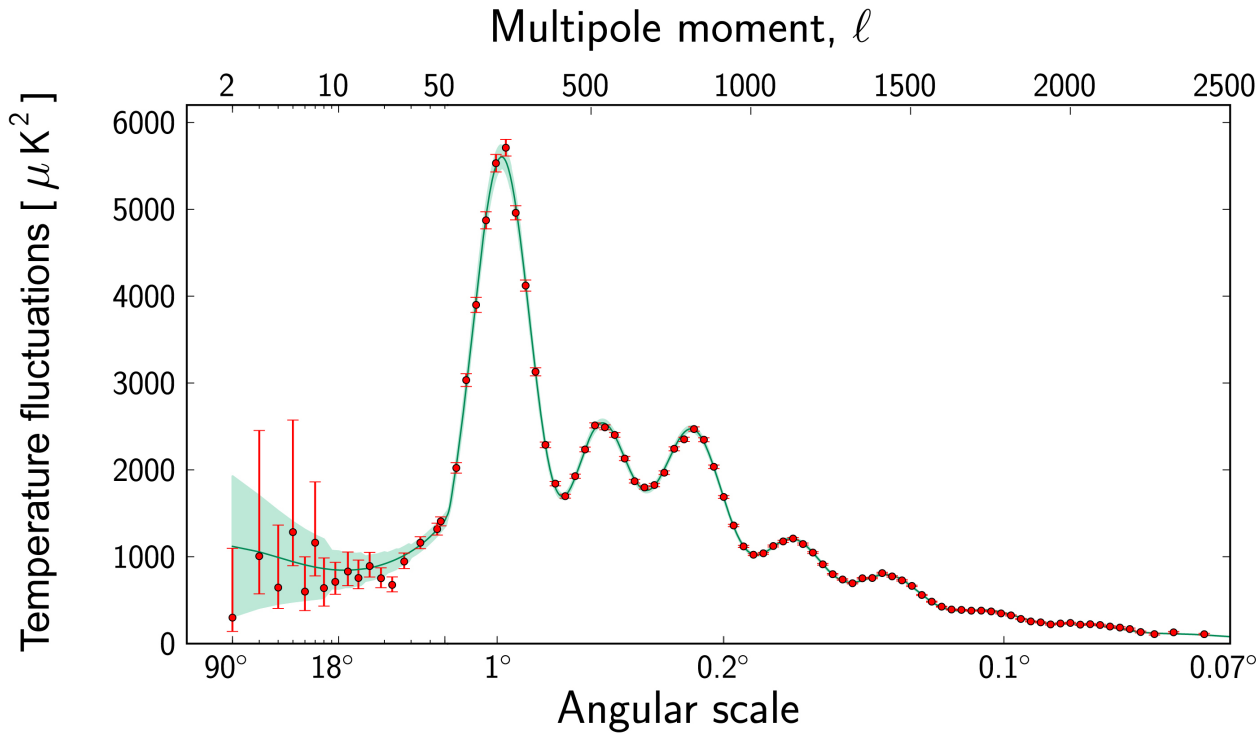
ボルツマ

$$\dot{f}_\ell -$$

* ボル

$$f_\ell :$$

$$\dot{\tau} C_\ell -$$



archy):

$$+ D_\ell$$

$$(2, \dots)$$

突項

観測されている多重極 ($\ell \approx 2500$) まで解くのは困難

Line-of-sight法

[Seljak & Zaldarriaga 96]

線形摂動では， line-of-sight法によって困難は回避できる。

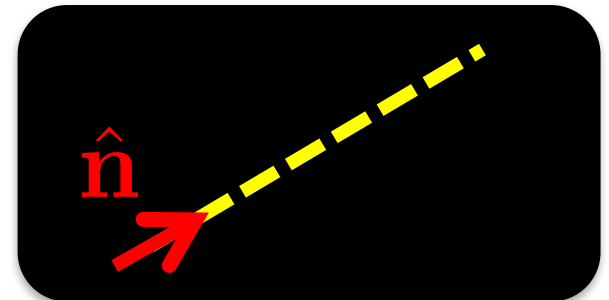
背景測地線（視線）に沿った積分形に書き直す：

$$f(\eta_0, \mathbf{x}_0, q_0, \mathbf{n}_0) = \int_0^{\eta_0} e^{-\tau} \underbrace{[D - \dot{\tau}(f - C)]}_{\text{ソース関数}} \underbrace{\text{at}(\eta, \bar{\mathbf{x}}, \bar{q}, \bar{\mathbf{n}})}_{\text{測地線上の点}}$$

光子の進行方向

背景時空においては， 測地線は直線になる

$$\begin{aligned}\bar{x}^i(\eta') &\equiv n_0^i(\eta' - \eta_0) + x_0^i, \\ \bar{n}^i(\eta') &\equiv n_0^i\end{aligned}$$



Line-of-sight法

[Seljak & Zaldarriaga 96]

線形摂動では， line-of-sight法によって困難は回避できる。

背景測観測量を， 散乱地点におけるソース関数と対応付け

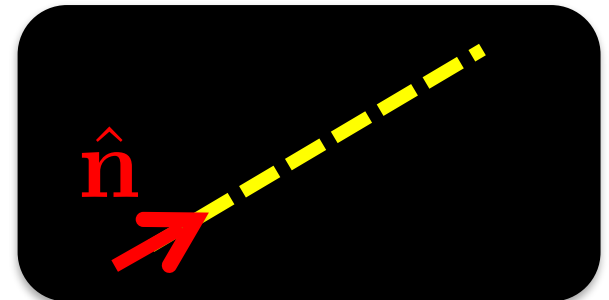
$$f(\eta_0, \mathbf{x}_0, q_0, \mathbf{n}_0) = \int_0^{\eta_0} e^{-\tau} \underbrace{[D - \dot{\tau}(f - C)]}_{\text{ソース関数}} \underbrace{\text{at}(\eta, \bar{\mathbf{x}}, \bar{q}, \bar{\mathbf{n}})}_{\text{測地線上の点}}$$

光子の進行方向

背景時空においては， 測地線は直線になる

$$\bar{x}^i(\eta') \equiv n_0^i(\eta' - \eta_0) + x_0^i,$$

$$\bar{n}^i(\eta') \equiv n_0^i$$



ソース関数の具体形を書くと,

- 重力による衝突項 [(integrated) Sachs-Wolfe項 (赤方偏移効果)]

$$D = -(\dot{\Phi} + ik\mu\Psi)\partial_{\ln q}\bar{f} \quad \mu \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}_0$$

- コンプトン散乱による衝突項

$$S \equiv f - C = -4f_{00} + 16iv_e\mu - \frac{2}{5}(f_{00} - \sqrt{6}f_{E,20})P_2(\mu)$$

6つの関数で完全に決定できる： $\Phi, \Psi, f_{00}, f_{20}, f_{E,20}, v_e$

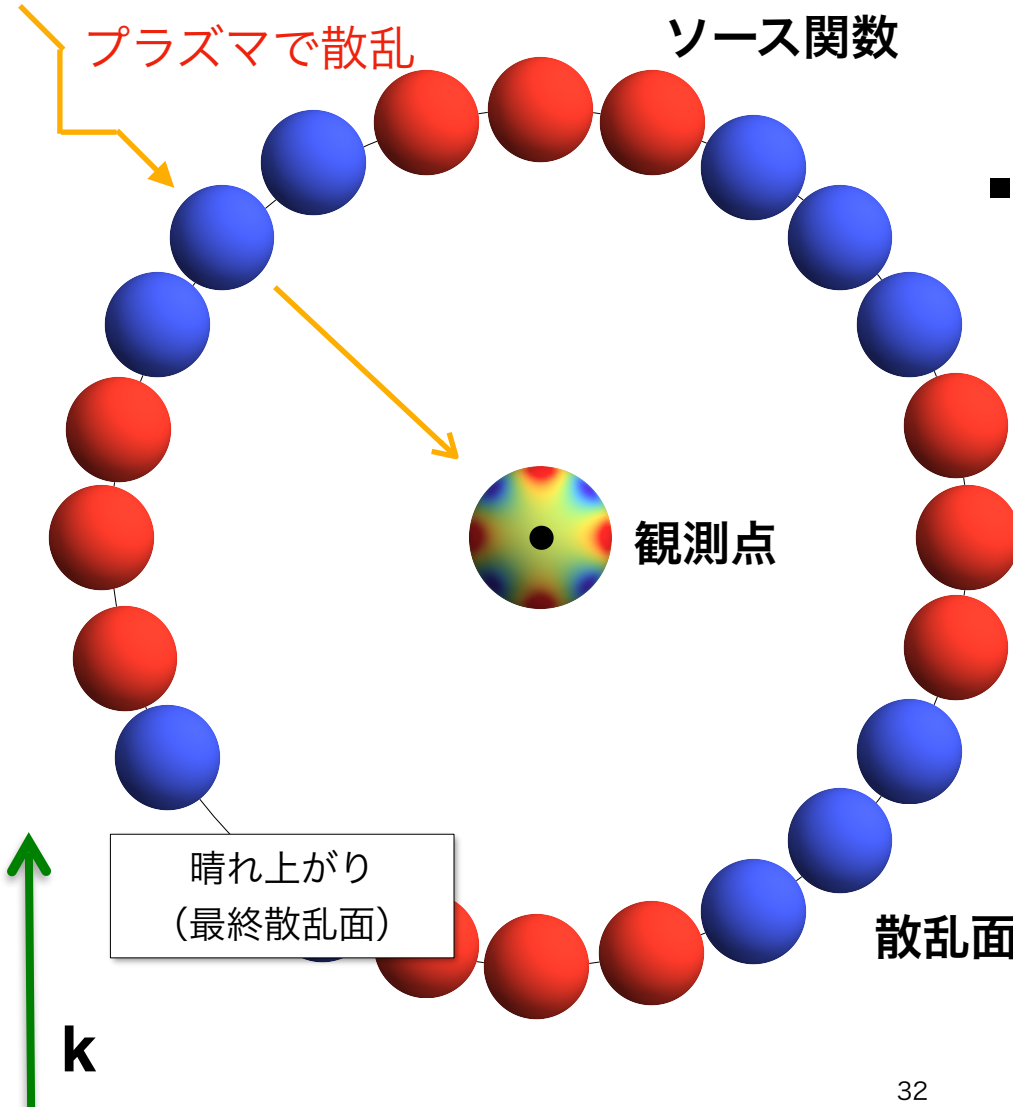
数千個の連立微分方程式を解かなくてもよい！

LoS法の直感的な理解

CMB光子

プラズマで散乱

ソース関数



- 散乱面上では、せいぜい2次の多重極
- ゆらぎによって、散乱面上の強度に空間的な非一様性が生じる
- 観測地点における高次の多重極は
天球面への射影で生成

散乱面上の多重極 ($ell \leq 2$) が分かればOK

Line-of-sight 法の高次摂動への拡張

単純に Line-of-sight 法を使うことはできない：

$$D = -(\dot{\Phi} + ik\mu\Psi)\partial_{\ln q}\bar{f}$$

+ 非線形項



重力レンズ効果

n の関数

$$- \left[\underbrace{\delta \left(\frac{d \ln q}{d\eta} \right)}_{\sim \Phi, \Psi} \partial_{\ln q} + \underbrace{\delta \left(\frac{dx^i}{d\eta} \right)}_{\text{重力レンズ効果}} \partial_{x^i} + \underbrace{\delta \left(\frac{dn^i}{d\eta} \right)}_{\text{重力レンズ効果}} \partial_{n^i} \right] (\bar{f} + \delta f)$$

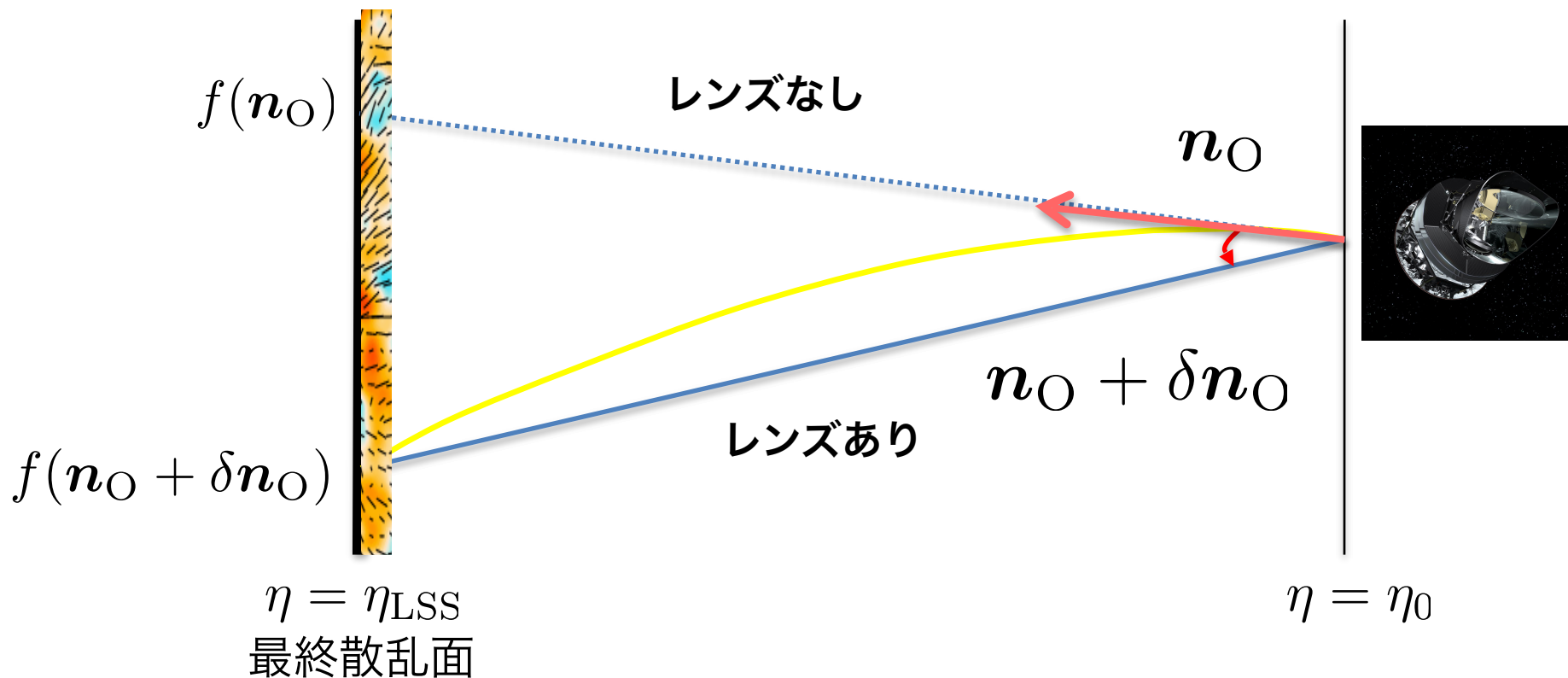
ソース関数に無限個の関数！

標準的な方法：リマッピング法

[Review: Lewis & Challinor 06]

見かけの到来方向の変化として，重力レンズの効果を取り入れる：

$$f_{\text{lensed}}(\mathbf{n}_0) = f_{\text{unlensed}}(\mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}_0)$$



高精度計算の必要性

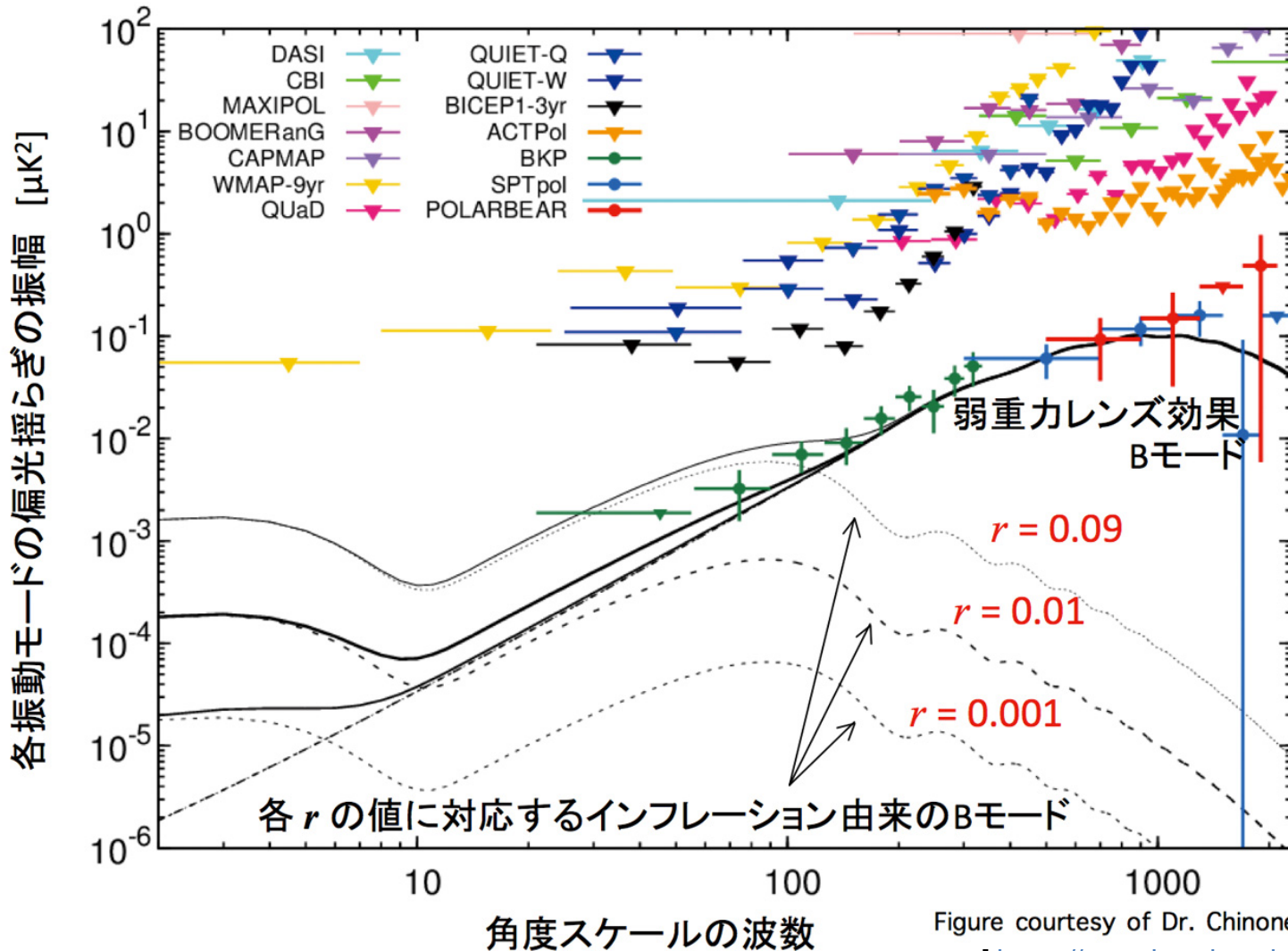
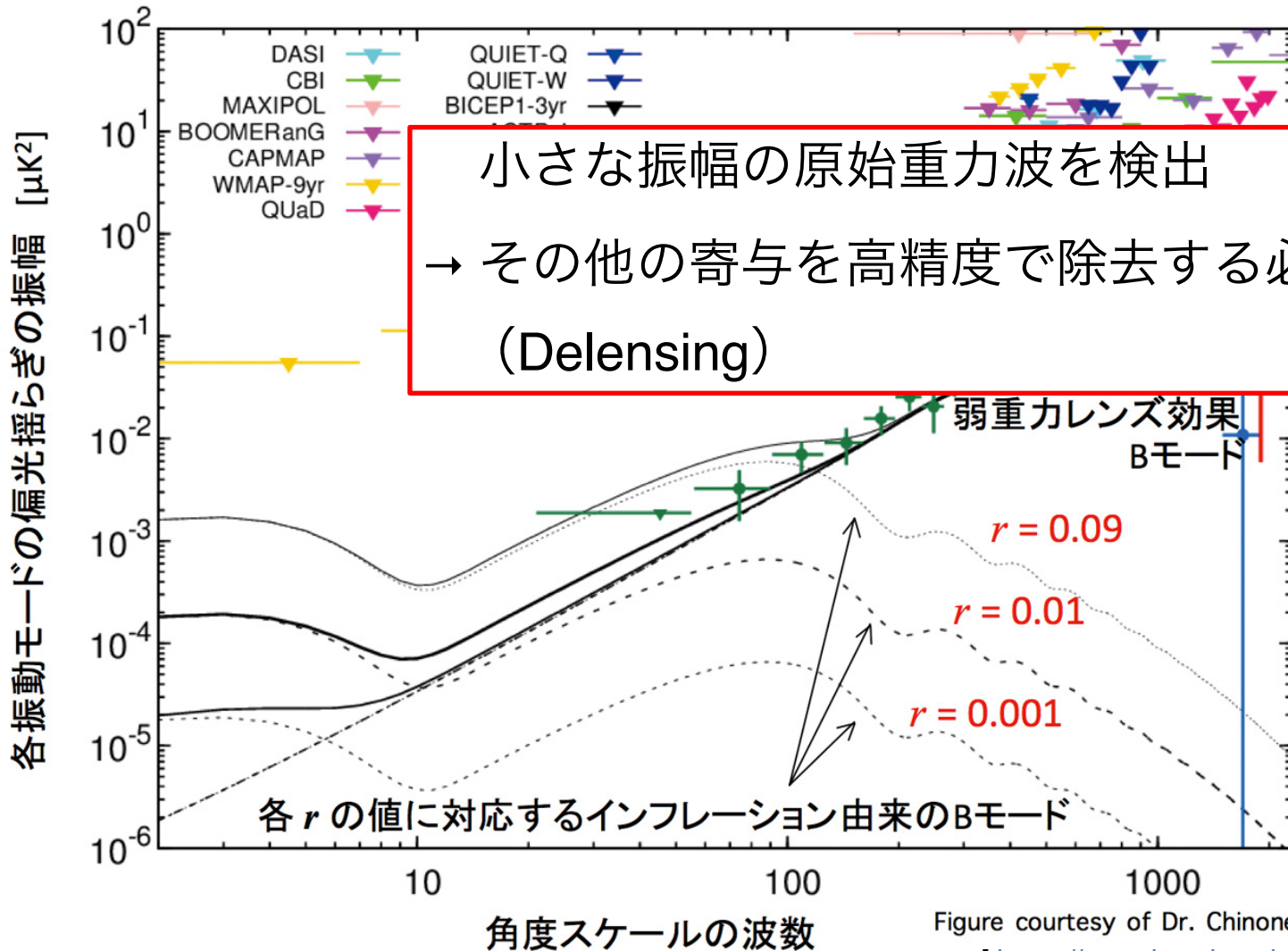


Figure courtesy of Dr. Chinone
[<https://www.isas.jaxa.jp>]

高精度計算の必要性



高精度計算の必要性

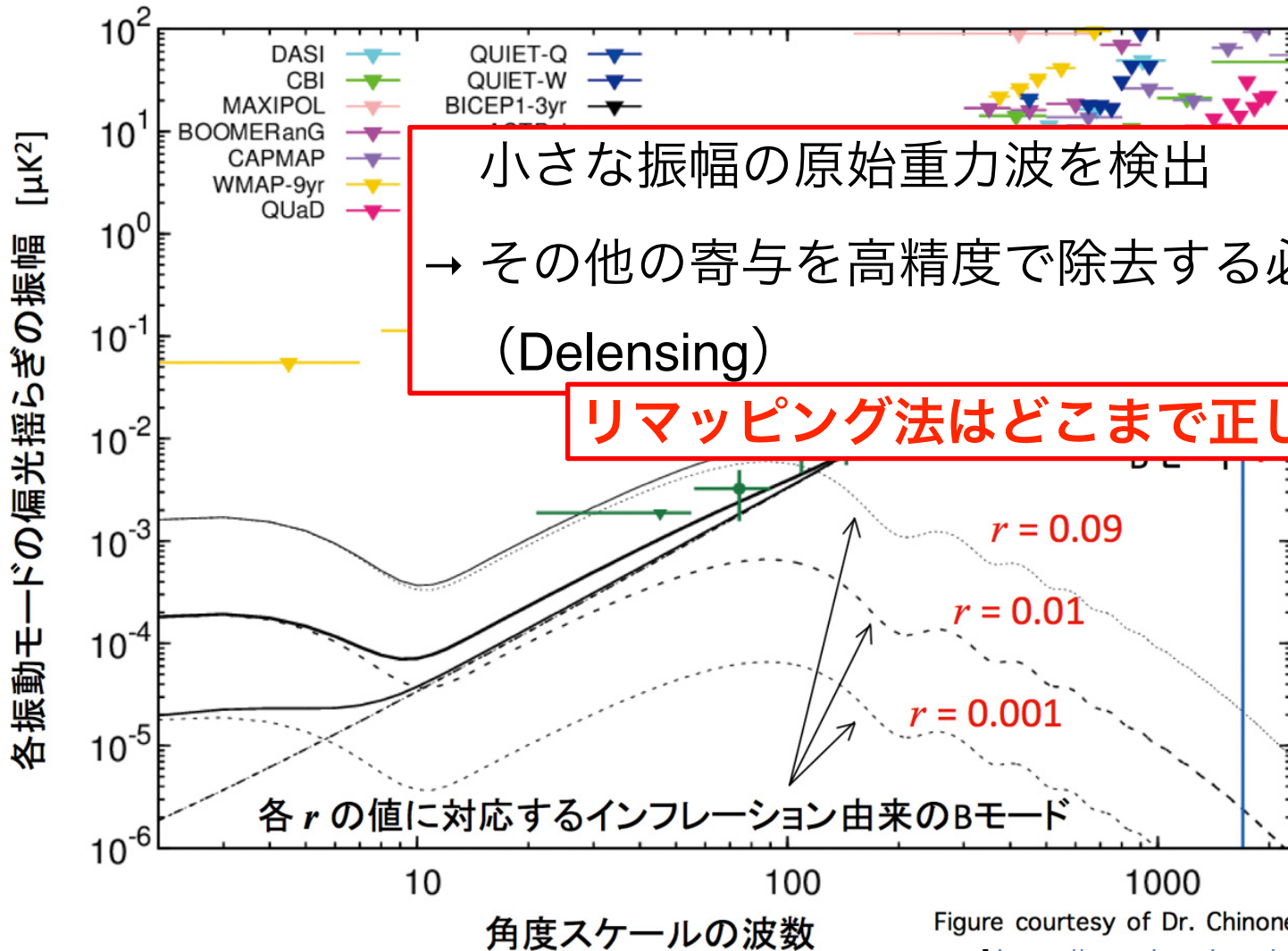


Figure courtesy of Dr. Chinone
[<https://www.isas.jaxa.jp>]

リマッピング法に対する疑問

- 他の非線形効果との関係は？ ゲージ依存性？

重力レンズ効果

$$- \left[\delta \left(\frac{d \ln q}{d\eta} \right) \partial_{\ln q} + \delta \left(\frac{dx^i}{d\eta} \right) \partial_{x^i} + \delta \left(\frac{dn^i}{d\eta} \right) \partial_{n^i} \right] (\bar{f} + \delta f)$$

- どれくらい厳密？ 他の非線形効果の影響？

重力赤方偏移 (ISW効果) ・ 時間遅延などは, 重力レンズと相互相関があるはず.

ナイーブには, (cross) \sim [(auto) \times (lens)]^{1/2} でレンズのautoに次いで大きい？

リマッピング法に対する疑問

- 他の非線形効果との関係は？ ゲージ依存性？

重力レンズ効果

$$- \left[\delta \left(\frac{d \ln q}{d \eta} \right) \partial_{\ln q} + \delta \left(\frac{dx^i}{d \eta} \right) \partial_{x^i} + \delta \left(\frac{dn^i}{d \eta} \right) \partial_{n^i} \right] (\bar{f} + \delta f)$$

- どれくらい厳密？ 他の非線形効果の影響？

全ての非線形効果を統一的に記述できないか？

リマッピング法は、ボルツマン方程式から導けるか？

“Curve”-of-sight 法

RS, Naruko, Hiramatsu, and Sasaki, JCAP**1410** (2014) 051

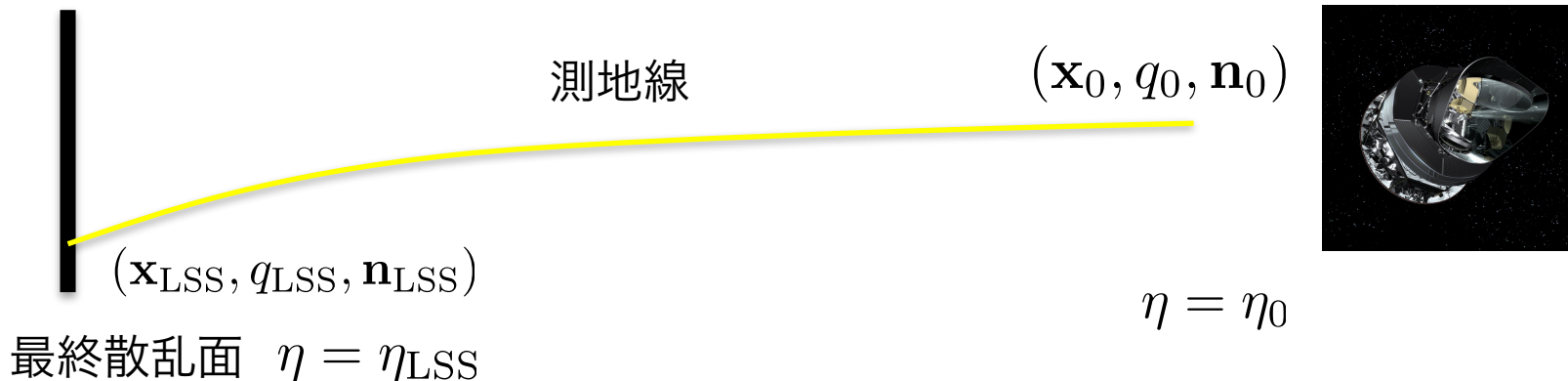
Namikawa, Naruko, RS, Taruya, and Yamauchi, JCAP **10** (2021) 029

基礎となるアイデア: リュウビルの定理

重力が働いていても,

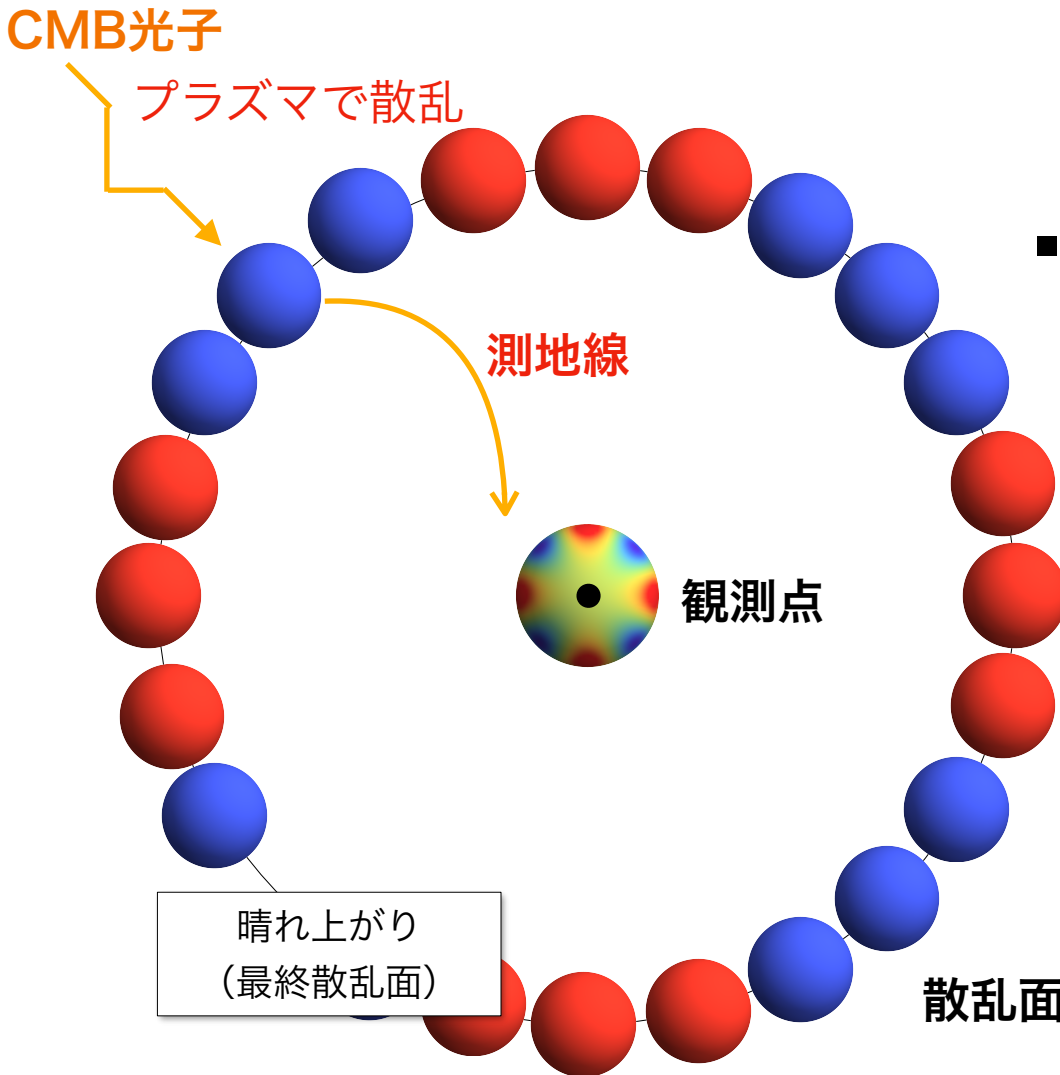
衝突項がなければ, 分布関数は測地線に沿って保存する:

$$f(\eta_0, \mathbf{x}_0, q, \mathbf{n}_0) = f(\eta_{\text{LSS}}, \mathbf{x}_{\text{LSS}}, q_{\text{LSS}}, \mathbf{n}_{\text{LSS}})$$



最終散乱面以降の発展はボルツマン方程式ではなく, **測地線方程式**を解けば分かるはず.

CoS法の直感的な理解



- 散乱面上では、せいぜい2次の多重極
- 測地線に沿って分布関数は保存
- 観測地点における高次の多重極は
時空の測地線による射影で生成
測地線方程式を解けば分かる

散乱面上の多重極 ($l \leq 2$) が分かればOK
+ 時空の測地線

CoS法の直感的な理解

CMB光子

プラズマで散乱

測地線

観測点

晴れ上がり
(最終散乱面)

- 散乱面上では、せいぜい2次の多重極
- 測地線に沿って分布関数は保存
- 観測地点における高次の多重極は
時空の測地線による射影で生成
測地線方程式を解けば分かる

数千個の連立微分方程式を解かなくてもよい！

散乱面上の多重極 ($l \leq 2$) が分かればOK
+ 時空の測地線

“Curve”-of-sight法

[Challinor 00, RS, Naruko, Hiramatsu, & Sasaki 14]

ボルツマン方程式をフルの測地線に沿った積分形に書き直す：

$$f(\eta_0, \mathbf{x}_0, q_0, \mathbf{n}_0) = \int_0^{\eta_0} e^{-\tau} \dot{\tau} \underbrace{[f - C]}_{\text{フルの測地線上の点}} \bigg|_{\text{at}(\eta, \mathbf{x}(\eta), q(\eta), \mathbf{n}(\eta))}$$

コンプトン散乱のみからのソース項

重力は位相空間での観測者と光源の相対位置をずらす効果として現れる：

リマッピング法の一般化

(ただし、近似なしかつ重力レンズ以外のすべての重力効果も含む)

(Cf. 他の方法 [Huang & Vernizzi 13], [Su & Lim 14], [Fidler, Koyama, & Pettinari 14])

具体的に計算するには*

$$[f - C]_{\text{at}(\eta, \mathbf{x}(\eta), q(\eta), \mathbf{n}(\eta))} = \text{光源の位置での展開}$$
$$\sum_{\ell, m} \int d^3k \quad \underbrace{[f - C]_{\ell m \mathbf{k}}}_{\text{散乱の情報}} \quad \underbrace{Y_{\ell m}(\mathbf{n}(\eta)) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(\eta)}}_{\text{重力の情報}}$$

有限和

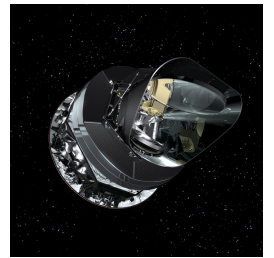
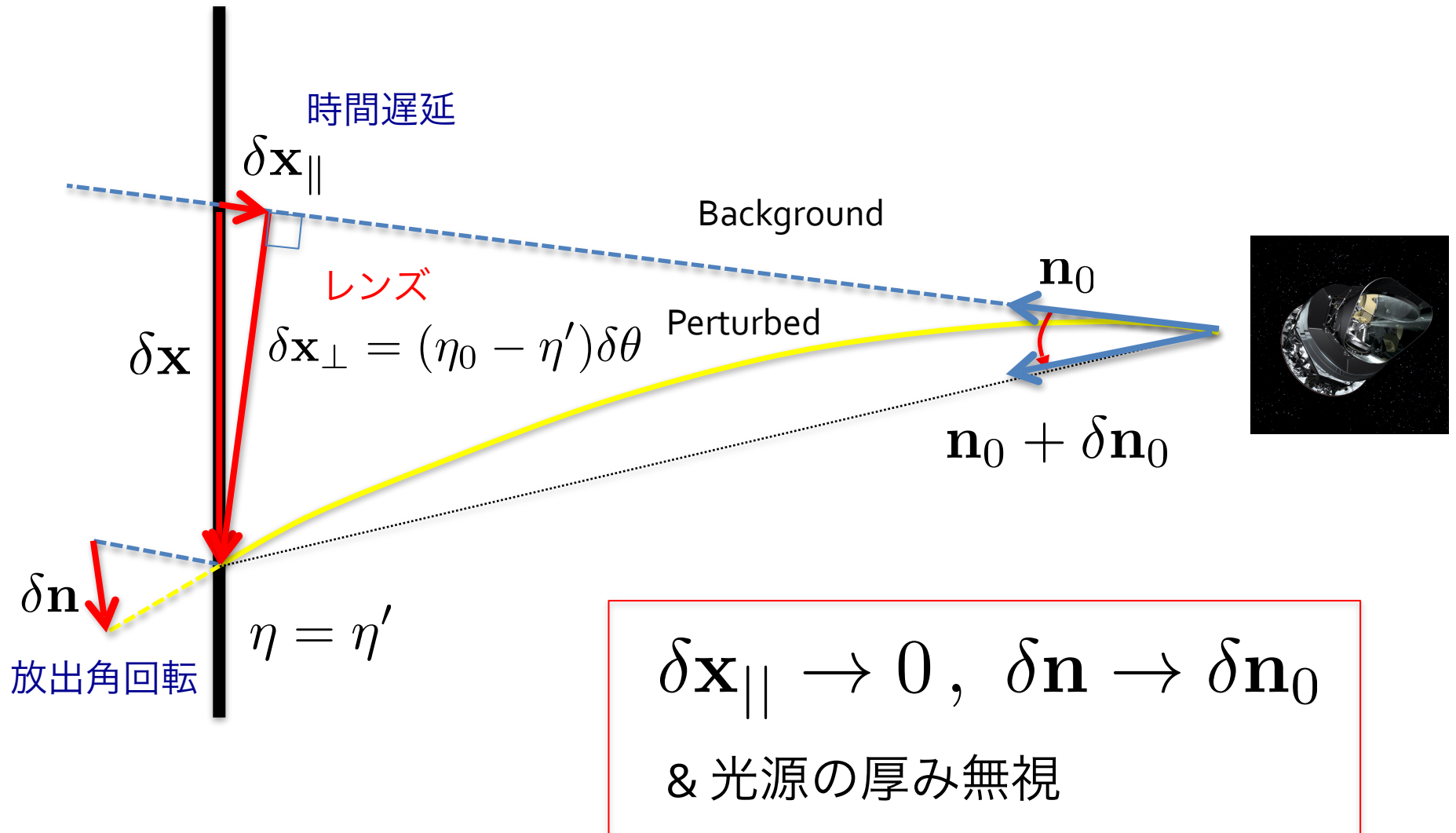
散乱の情報： $\epsilon \ll 1$ 程度の Boltzmann hierarchy を解く

重力の情報： 測地線方程式を解く（ボルン近似など）

例えば,

それぞれ揺らぎについて逐次的に解けば, Wick の定理を用いて相関を計算できる.

リマッピング法との対応



CMB偏光への拡張

偏光の自由度（ヘリシティ）に対応して，分布関数が 2×2 行列に：

各成分がストークスパラメータに対応

$$f_{ab} = \begin{pmatrix} f_I - f_V & f_Q - if_U \\ f_Q + if_U & f_I + f_V \end{pmatrix} \quad (a, b = +, -)$$

円偏光基底

[Pitrou 09, Beneke & Fiedler 10, Naruko+ 13]

E & Bモードは非対角成分から計算できる：

$$f_{\pm\mp}(\eta_0, \mathbf{n}_0) = \sum_{\ell m} \underline{([f_E]_{\ell m} \mp i[f_B]_{\ell m})} \pm 2Y_{\ell m}(\mathbf{n}_0)$$

CoS法のCMB偏光への拡張

[Namikawa, Naruko, RS, Taruya, & Yamauchi 21]

$$f_{ab}(\eta_0, \mathbf{x}_0, q_0, \mathbf{n}_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta' g_v \underline{U_a^{a'} [U_b^{b'}]^*} S_{a'b'} \text{ at } (\eta', \mathbf{x}(\eta'), q(\eta'), \mathbf{n}(\eta'))$$

偏光回転が加わる

[Dai+ 13; Lewis+17; Dio+ 19]

測地線方程式, それに伴うテトラドや偏光基底の回転を求めれば, 観測地点でのCMB偏光を評価できる.

レンズ効果によるBモードへの応用

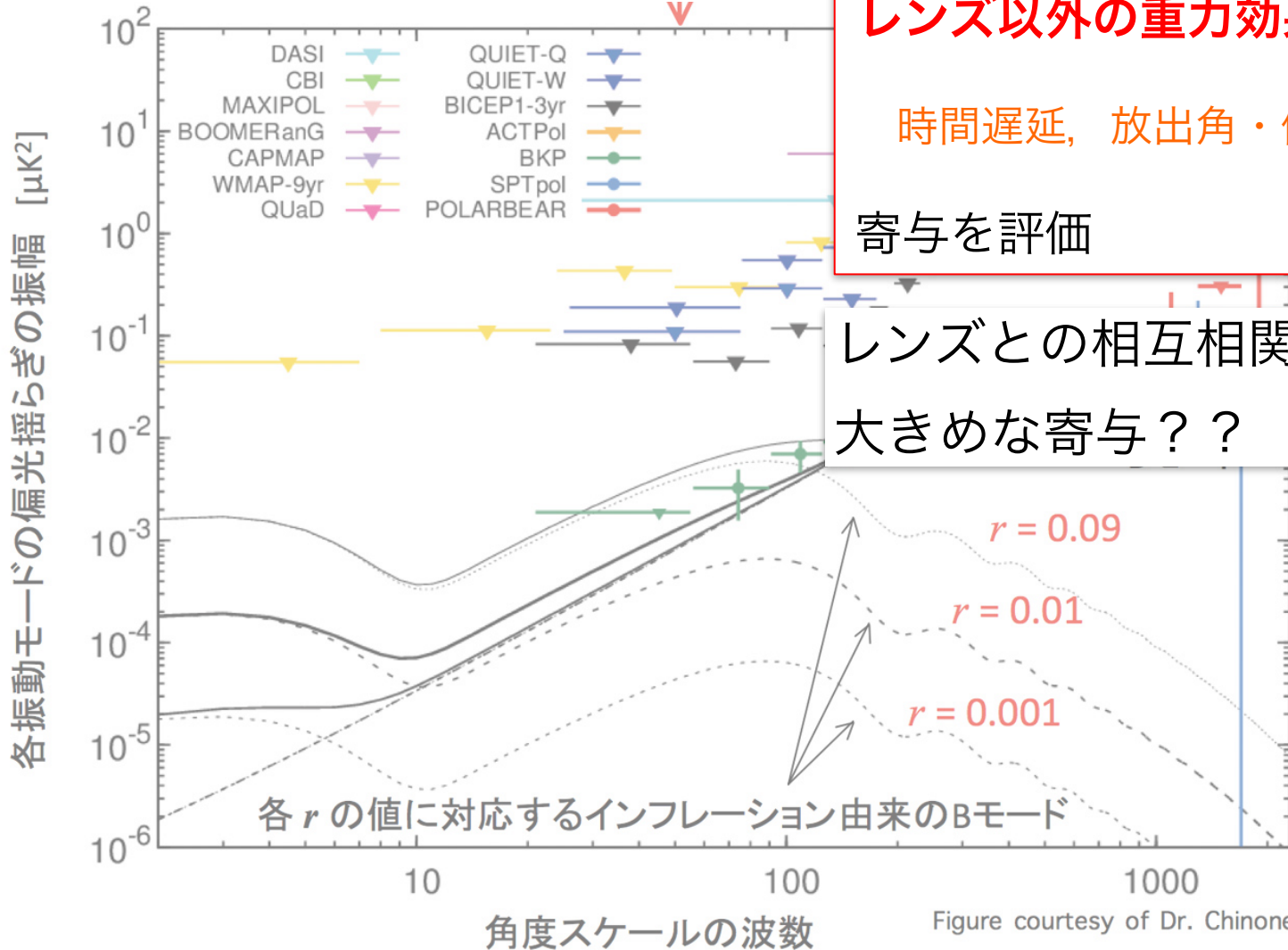
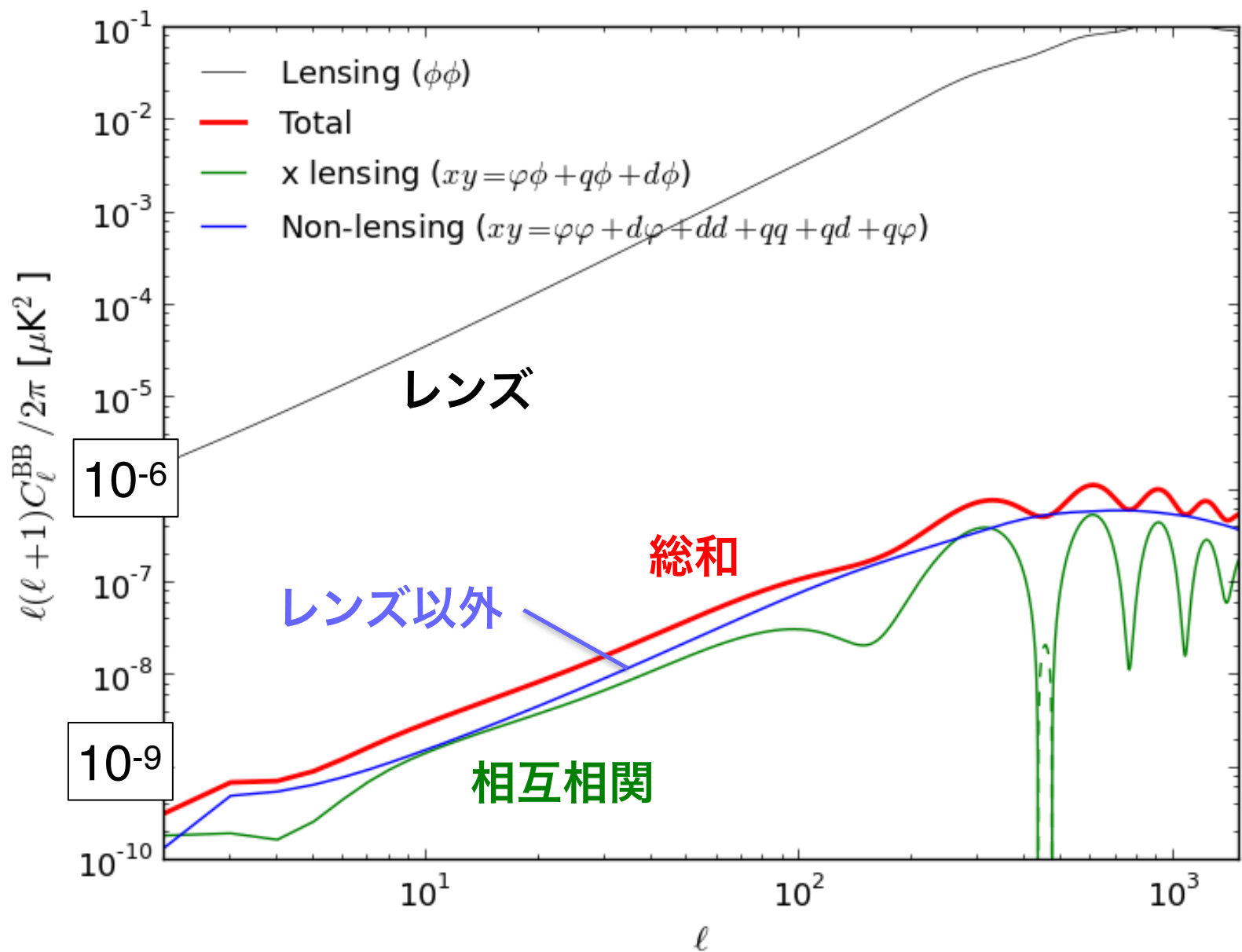
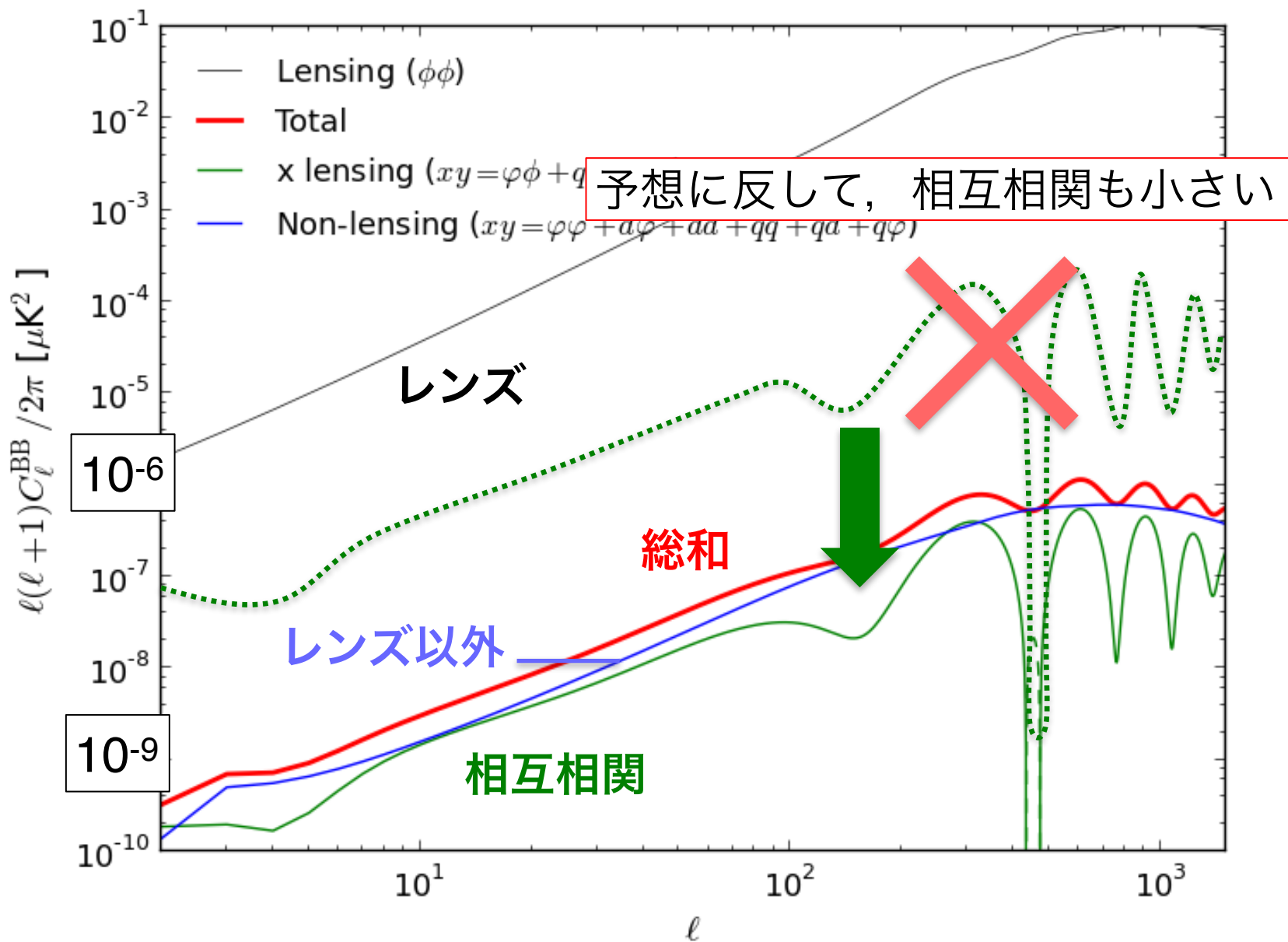


Figure courtesy of Dr. Chinone

各非線形重力効果によるBモード



各非線形重力効果によるBモード



結果のまとめ

- レンズ効果に対する他の非線形重力効果は, $O(10^{-4})$

テンソル・スカラー比に直すと, $r < O(10^{-5})$

- レンズとの相互相関が, 自己相関と同じくらい小さい

ナイーブには, $(\text{cross}) \sim [(\text{auto}) \times (\text{lens})]^{1/2} \quad \longrightarrow \quad r = O(0.001)$

なぜ?

相互相関も小さくなる理由

1. 時間遅延 & 放出角回転 [Lewis+ 17]

お互いの寄与がほとんど打ち消しあってしまう。

2. 偏光回転 [Dai 14; Lewis+ 17; Dio+ 19]

2次摂動ではゼロになってしまう。

幾何学的な理由

モデルに依存しない

3. 赤方偏移

$\dot{\Phi}$ に依存するため、主要な寄与がある時期がレンズと異なる。

物質優勢期でゼロ モデル依存（修正重力など、他のモデルでは要検討）

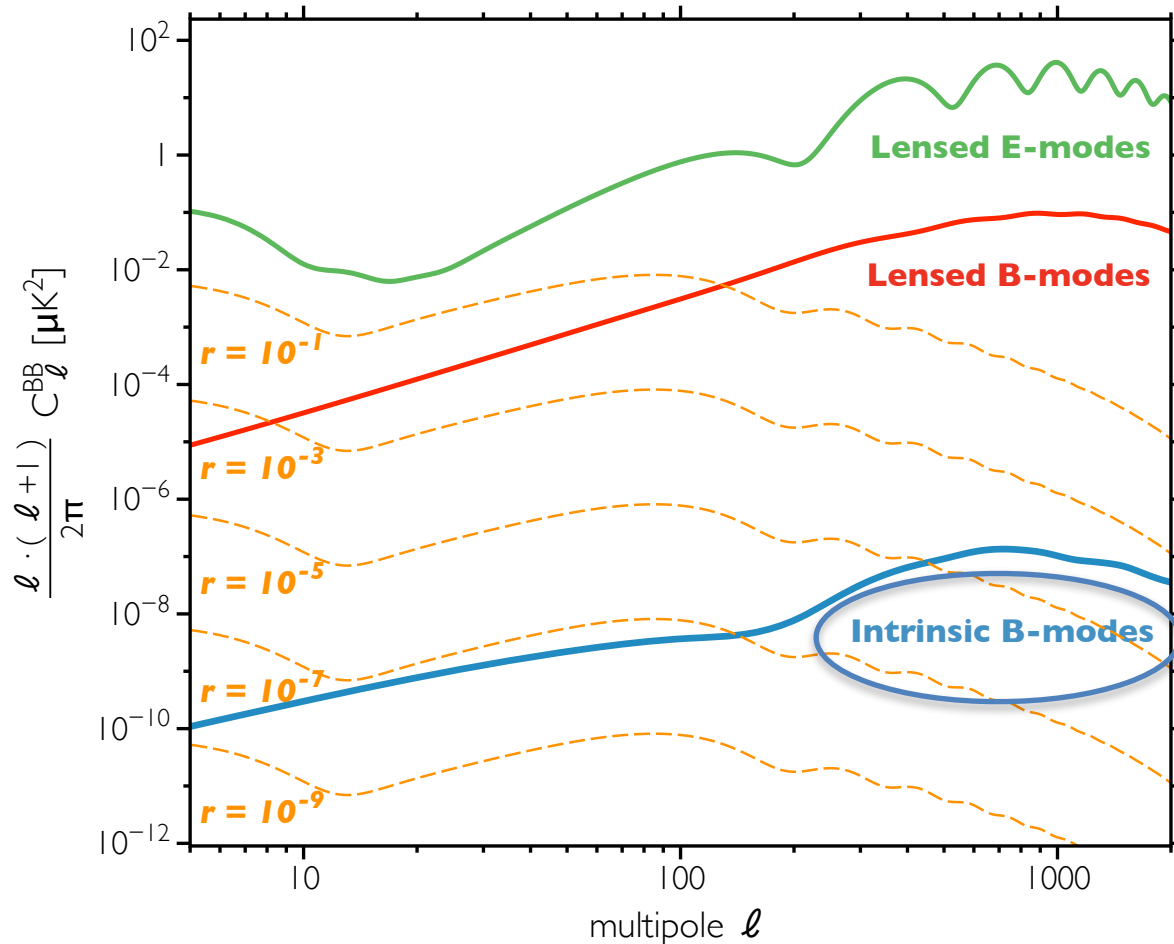
テンソル・スカラー比 $r = 10^{-5}$ 程度までリマッピング法でOK

cf. 次世代計画のターゲットは $r = 10^{-3}$

その他の寄与

最終散乱面での非線形性：非線形散乱や2次重力波など

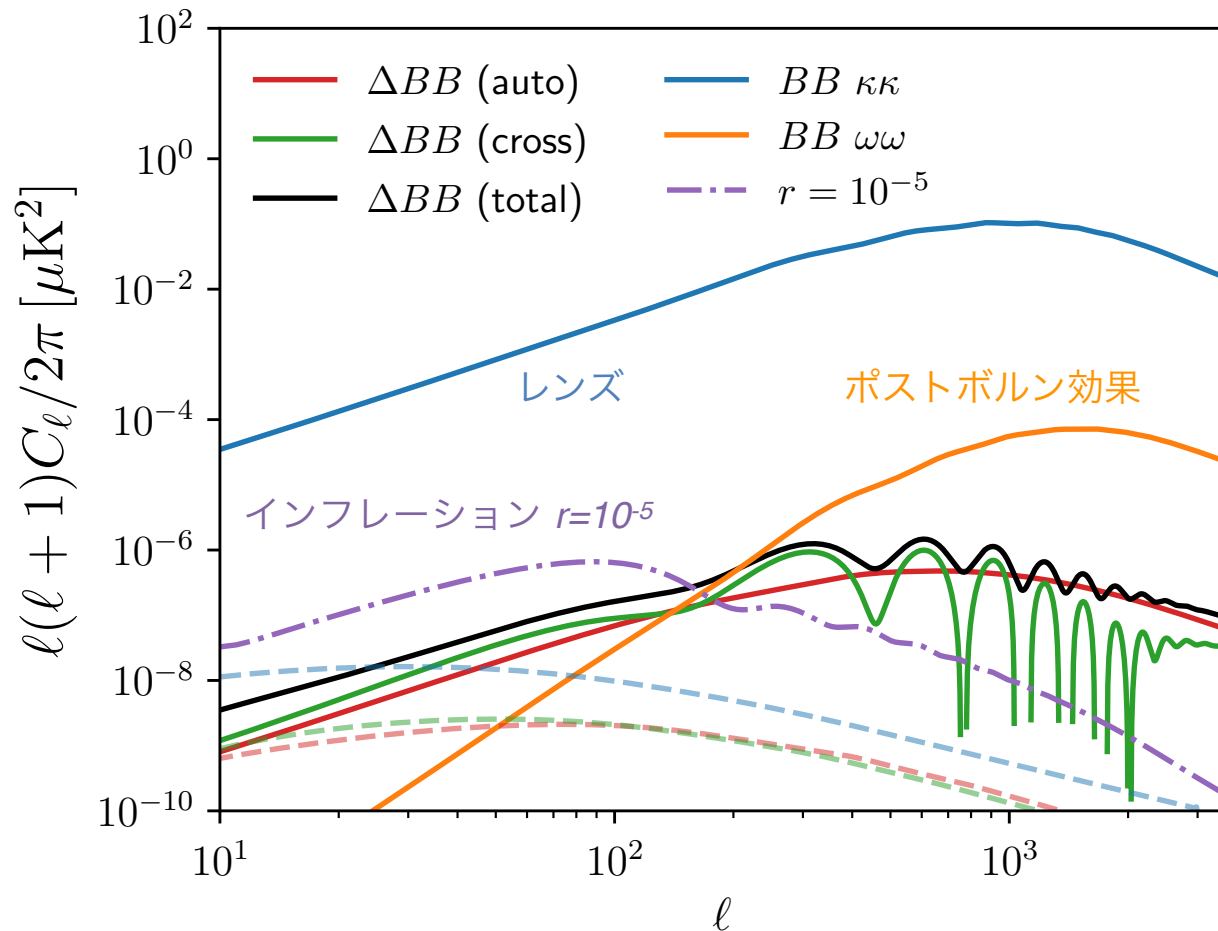
[Fidler, Pettinari, Beneke, Crittenden, Koyama, & Wands 14]



その他の寄与

ポストボルン効果：測地線方程式の高次摂動効果

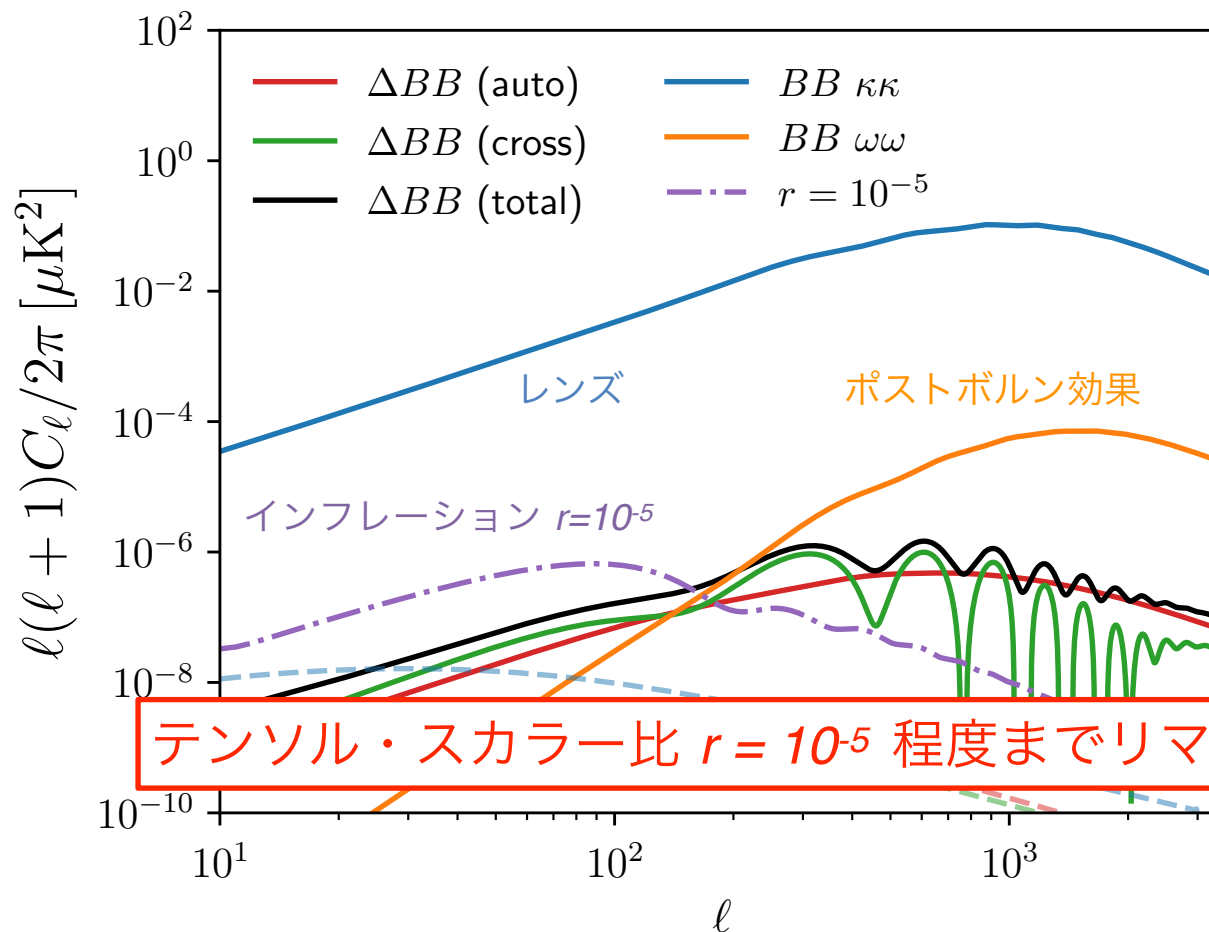
[Lewis, Hall, & Challinor 17]



その他の寄与

ポストボルン効果：測地線方程式の高次摂動効果

[Lewis, Hall, & Challinor 17]



まとめ

- レンズ効果など非線形シグナルが検出され始めている.
- **“Curve-of-Sight”法**

レンズ効果を含めた系統的なCMB非線形シグナル計算の枠組み

応用：非ガウス性や**Bモード偏光**

- CoS法による既存の方法（リマッピング法）の精度チェック

Bモード偏光: $r=10^{-5}$ 程度までリマッピング法でOK

ただし、修正重力などの Λ CDMモデル以外では要検討
非線形シグナルが見えたら、何が分かる？

- さらなる応用？ 修正重力・DE, 複屈折, ...